ГЕОМЕТРИЯ 7

ФГОС

УМК

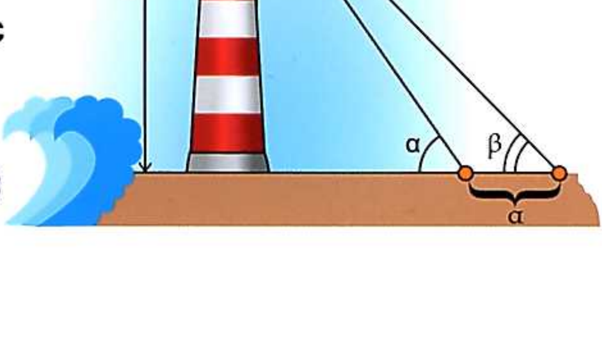
В.А. Гусев

Сборник задач по геометрии

Ко всем учебникам по геометрии за 7 класс

- Смежные и вертикальные углы
- Равенство треугольников
- Перпендикулярные прямые
- Задачи на построение
- Симметрия на плоскости

7 класс



ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

В.А. Гусев

Сборник задач по геометрии

Ко всем учебникам
по геометрии за 7 класс

7 класс

*Рекомендовано
Российской Академией Образования*

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2013

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г96

Гусев, В.А.

Г96 Сборник задач по геометрии: 7 класс / В.А. Гусев. — М. : Издательство «Экзамен», 2013. — 141, [3] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-05174-9

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Пособие является необходимым дополнением ко всем учебникам по геометрии за 7 класс, рекомендованным Министерством образования и науки Российской Федерации и включенным в Федеральный перечень учебников.

Сборник содержит задачи по курсу геометрии в соответствии с программой основной школы. Он состоит из двух частей: в первую часть включены задачи, относящиеся к темам обязательной программы, во вторую — ответы, решения, указания.

Задачи в сборнике распределены по 5 главам, охватывающим все темы курса геометрии 7 класса.

Пособие рассчитано на преподавателей школ, лицеев и гимназий, оно также может быть использовано учащимися для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Формат 60х90/16. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 5,04. Усл. печ. л. 9.
Тираж 150 000 (1-й завод — 7000) экз. Заказ № 2580/12.

ISBN 978-5-377-05174-9

Оглавление

Глава 4

ПЕРВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Глава 5

СИММЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Обращение к читателю

Этот задачник продолжает все те идеи, которые мы начали реализовывать в книге «Сборник задач по геометрии для 5–6 классов» [...]. Мы не будем полностью повторять все, что написано в разделе «Обращение к читателю» в книге [...], но некоторые основные положения уточним и дополним.

1. Курс «Геометрия 7-й класс» на данный момент практически сложился.

Можно назвать следующие основные учебники и задачники по этому курсу:

Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 7–9 классы;

Гусев В.А. Геометрия. 7 класс;

Гусев В.А. Сборник задач по геометрии. 5–9 классы;

Глейзер Г.Д. Геометрия. 7–10 классы;

Киселев А.П. Геометрия для 6–9 классов;

Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы;

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 7–9 классы;

Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7–9 классы.

Практически все учебники содержат разделы, которые есть в нашем задачнике:

Глава 1. Смежные и вертикальные углы.

Глава 2. Равенство треугольников.

Глава 3. Перпендикулярные прямые.

Глава 4. Первые задачи на построение.

Глава 5. Симметрии на плоскости.

Среди этих пяти глав первые четыре действительно нужны, т.к. вопросы, которые там рассмотрены, больше не будут изучаться в других классах. Материал 5-й главы будет уточняться и развиваться.

Предлагаемый задачник имеет все особенности, которые есть и в задачнике для 5–6 классов. Повторим описание видов задач, которые содержатся в этом задачнике.

Перечислим некоторые особенности предлагаемого задачника.

Прежде всего задачи подобраны по шести основным видам, для каждого из которых имеются свои знаки. Охарактеризуем эти виды задач.

Задачи и вопросы, ответы на которые *учат делать выводы* (мы их называем «учись делать выводы»). С помощью этих задач можно проверить, усвоен основной теоретический материал или нет. Уметь решать такие задачи должен каждый ученик.

Эта группа задач формирует умения по использованию приема мыслительной деятельности «синтез» и основ синтетической деятельности, которые лежат в основе всей математической деятельности учащихся.

Задачи для самоконтроля (мы их называем «ищи причину вывода»): решая их, нужно не только получить следствие из условия задачи, но и *выяснить причину появления этого следствия*. Задачи этой группы могут вызвать затруднения у некоторых учащихся.

Задачи этой группы формируют прием мыслительной деятельности «анализ» и являются основой для овладения умениями аналитической деятельности, без которой невозможно представить успехи в математической деятельности учащихся.

С *Стандартные задачи* — наиболее простые задачи; без умения их решать нельзя получить положительную оценку.

Математики к таким задачам относятся недостаточно внимательно, хотя ясно, что, не владея методикой решения задач этого уровня, бесполезно говорить об успехах в обучении математике. Помимо этого ясно и то, что нельзя сводить весь процесс обучения математике к решению таких стандартных задач.

У *Учебные задачи* — самая многочисленная группа задач, которые придется решать в классе и дома. Эти задачи позволяют усвоить материал учебника и перейти к решению более сложных геометрических задач.

Уровень сложности этих задач разный, он колеблется от стандартных задач до творческих. Это в основном те задачи, с помощью которых оценивается степень успешности учащихся в обучении. В наших задачниках мы пытаемся построить эти учебные задачи по степени возрастания их сложности, но эта систематизация должна быть продолжена, т.к. именно эти задачи составляют основу Единого государственного экзамена.

Т *Творческие задачи.* К ним относятся задачи, которые не удается решить стандартными методами; для их решения нужно выдвинуть некоторую новую идею. Эти задачи решаются с использованием приема мыслительной деятельности «анализ через синтез», который И. Пааже назвал «квинтэссенцией мышления».

Исследовательские задания. Для своего решения они требуют значительных усилий. Такие задания не могут полностью решаться в классе, они предполагают работу дома, возможно, даже не одного, а нескольких учеников.

Многие из предложенных исследовательских заданий составлены на основе статей, помещенных в журнале «Квант», но материал этих заданий пересмотрен и сделан более доступным для учащихся.

В первых четырех видах задач: «учись делать выводы», «ищи причину вывода», «стандартные задачи» и «учебные задачи», как правило, не содержатся задачи, при решении которых используются методы, которые могут появиться гораздо позднее в процессе изучения курса геометрии.

В «творческих задачах» и в «исследовательских задачах» могут появляться методы и факты, которые учащимся придется изучать дополнительно, но эти моменты всегда отдельно оговариваются.

В настоящее время существует достаточно много различных учебников и задачников, где встречаются разнообразные трактовки тех или иных геометрических понятий и различные обозначения. В связи с этим в начале каждого раздела помещены два пункта:

Основное теоретическое содержание. Здесь приводится минимальная теоретическая информация, необходимая для решения предлагаемых задач.

Термины и обозначения. Здесь указаны используемая в задачнике терминология и минимальный список обозначений.

Задачи в задачнике имеют двойную нумерацию. Запись задачи 5.16 означает, что это 16-я задача из пятой главы.

Рисунки в задачнике также имеют двойную нумерацию (в том числе рисунки, включенные в ответы): первая цифра указывает номер главы, вторая — порядковый номер рисунка. Например, рис. 5.15 — это 15-й рисунок в главе 5. Номера рисунков в ответах продолжают нумерацию рисунков к текстам задач.

Глава 1
СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

1.1. СВОЙСТВА СМЕЖНЫХ УГЛОВ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми одной прямой.

ТЕОРЕМА. Сумма смежных углов равна 180°.

Из этой теоремы можно вывести следующие следствия.

Следствие 1. Если два угла равны, то смежные с ними углы тоже равны.

Следствие 2. Угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.

Следствие 3. Угол, смежный с острым углом, — тупой; угол, смежный с тупым углом, — острый.

Термины и обозначения

Мы используем все обозначения, о которых сказано в задачнике для 5–6 классов. Часто в этом задачнике используется термин «*угол между лучами*», он обозначается $\angle(ac)$, где a и c — лучи.

Читается: угол между лучами a и c.

Задачи

1.1. На рисунке 1.1 угол COA выделен дужкой. Назовите угол, смежный с этим углом.

1.2. На рисунке 1.2 на прямой AB отмечена точка O, из которой проведены два луча OM и OK. Назовите пары смежных углов, которые вы видите на этом рисунке.

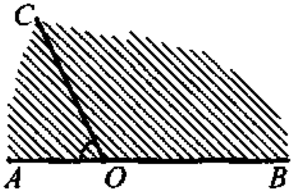


Рис. 1.1

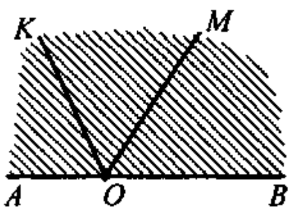


Рис. 1.2

1.3. Можно ли углы *ABC* и *CBD*, изображенные на рисунке 1.3 назвать смежными?

1.4. О двух углах известно, что сумма их равна 180°. Можно ли утверждать, что эти углы смежные?

1.5. Верны ли такие утверждения: а) если два угла смежные, то один из них острый, а другой тупой; б) если один из двух углов острый, а другой тупой, то они смежные?

1.6. Могут ли два смежных угла быть оба:

а) острыми; б) тупыми; в) прямыми?

1.7. Даны два угла. Равны ли смежные с ними углы?

1.8. Угол α, смежный с углом β, равен 30°. Найдите угол β.

1.9. Поставьте необходимые обозначения и выпишите углы, смежные с углом, изображенным на рисунке 1.4. Какими свойствами обладают смежные углы?

1.10. Нарисуйте угол. Постройте смежный с ним угол. Сколько таких углов можно построить?

1.11. Нарисуйте луч *l*. Нарисуйте еще два луча так, чтобы вместе с данным они образовали смежные углы.

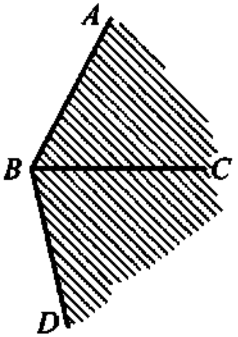


Рис. 1.3

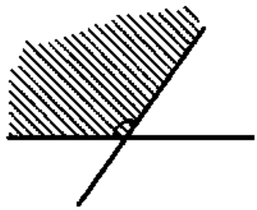


Рис. 1.4

1.12. Найдите угол, смежный с углами: 30°, 45°, 90°, 15°30′, 82°2′.

1.13. Являются ли два угла смежными, если: а) их объединением является полуплоскость; б) их пересечением является луч; в) их объединением является полуплоскость, а пересечением — луч? Сделайте соответствующие рисунки.

1.14. Нарисуйте два смежных угла.

а) Какая фигура является их пересечением? объединением?

б) Докажите, что сумма смежных углов равна 180°.

1.15. Найдите смежные углы, если: а) один из них на 45° больше другого; б) их разность равна 50°; в) один в 5 раз меньше другого; г) они равны.

1.16. Найдите смежные углы, если градусные меры относятся как: а) 2 : 3; б) 3 : 7; в) 11 : 25; г) 22 : 23.

1.17. Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме 100°?

1.18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.5). Постройте угол, смежный: а) с углом BCD; б) с углом C_1CD; в) с углом B_1BD. Какова градусная мера построенных углов?

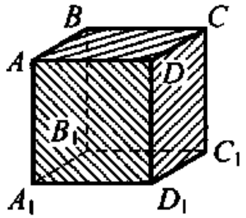


Рис. 1.5

1.19. Найдите величину угла между биссектрисами смежных углов.

1.20. Даны два неравных угла. Докажите, что большему углу отвечает меньший смежный угол, а меньшему — больший смежный угол.

1.21. Докажите, что если смежные углы равны, то они прямые.

1.22. Почему при двойном складывании листа бумаги получается прямой угол?

1.23. Докажите, что если два различных прямых угла имеют общую сторону, то они смежные.

1.24. От полупрямой a в одну полуплоскость отложены углы (ab) и (ac). Докажите, что если угол (ab) прямой, то угол (bc) острый.

1.25. От луча AB в разные полуплоскости отложены углы BAC и BAD. Пересекает ли прямую AB отрезок CD? Почему?

1.26. Углы (ab) и (ac) отложены от полупрямой a в одну полуплоскость, причем угол (ab) больше угла (ac). Докажите, что $\angle(bc) = \angle(ab) - \angle(ac)$.

1.27. Углы BAC и BAD отложены от полупрямой AB в разные полуплоскости. Докажите, что угол CAD равен сумме этих углов или дополняет ее до 360°, а именно, если сумма градусных мер данных углов не превосходит 180°, то $\angle CAD = \angle BAC + \angle BAD$, а если она больше 180°, то $\angle CAD = 360° - (\angle BAC + \angle BAD)$.

1.28. Точки A, B и C не лежат на одной прямой и точка P не принадлежит прямым AB, AC и BC. Докажите, что по крайней мере одна из прямых PA, PB и PC пересекает соответственно отрезок BC, AC или AB.

1.2. СВОЙСТВА ВЕРТИКАЛЬНЫХ УГЛОВ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

ТЕОРЕМА. Вертикальные углы равны.

Задачи

1.29. Сколько различных углов образуется при пересечении двух прямых? Какими свойствами обладают эти углы?

1.30. Сколько пар вертикальных углов и сколько пар смежных углов изображено на рисунке 1.6?

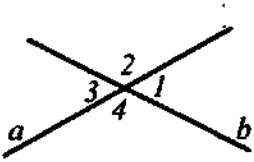


Рис. 1.6

1.31. Сколько углов, меньших 180°, получается при пересечении трех прямых, проходящих через одну точку?

1.32. Могут ли при пересечении двух прямых образоваться равные углы? Как они называются? Сколько их?

1.33. Могут ли вертикальные углы быть: а) прямыми; б) тупыми; в) один острым, а другой тупым?

1.34. Верно ли утверждение, что если два угла равны, то они вертикальные? Проиллюстрируйте ответ рисунком.

1.35. Какими (острыми, прямыми или тупыми) являются вертикальные углы, если их сумма: а) меньше 180°; б) больше 180°; в) равна 180°?

1.36. Верно ли следующее утверждение: «Два угла с общей вершиной, объединение сторон которых есть две прямые, являются вертикальными углами»?

1.37. Через какие вершины куба можно провести прямые, чтобы при их пересечении образовались вертикальные углы?

С **1.38.** Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?

1.39. С помощью транспортира найдите величины всех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых. Нужно ли измерять все углы? Сколько углов достаточно измерить, чтобы ответить на этот вопрос?

У **1.40.** а) Докажите, что вертикальные углы равны. б) Докажите, что если один из четырех углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, имеет величину 90°, то величины трех остальных углов также равны 90°.

1.41. Сумма величин двух вертикальных углов равна 120°. Найдите величину каждого из них.

1.42. Установите, верно ли следующее предложение: «Два угла, сумма которых есть развернутый угол, являются смежными углами.»

1.43. Запишите, пересечением каких полуплоскостей, заданных на рисунке 1.7, является: 1) каждый из вертикальных углов: а) $\angle 1$ и $\angle 3$, б) $\angle 2$ и $\angle 4$; 2) каждый из смежных углов: а) $\angle 1$ и $\angle 2$, б) $\angle 3$ и $\angle 4$.

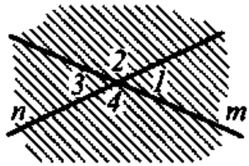


Рис. 1.7

1.44. Найдите величины углов, образованных при пересечении двух прямых, если один из них равен 110°.

1.45. Найдите величины углов, образованных при пересечении двух прямых, если: а) один из них на 20° больше другого; б) один из них составляет половину другого; в) сумма величин двух из них равна 100°.

1.46. Один из углов, которые образуются при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найдите эти углы.

1.47. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

1.48. Найдите углы, которые образуются при пересечении двух прямых, если сумма трех углов равна 270°.

1.49. Дан угол со сторонами a и b. Проведите полупрямую a_1, дополнительную к полупрямой a, и полупрямую b_1, дополнительную к b. Чему равен угол со сторонами a_1 и b_1? Какими являются углы со сторонами a_1 и b и a и b_1?

1.50. На рисунке 1.8 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

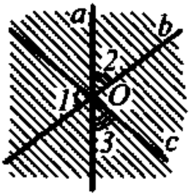


Рис. 1.8

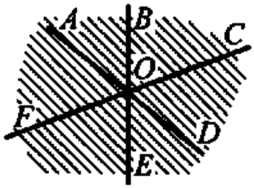


Рис. 1.9

1.51. На рисунке 1.9 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

1.52. Сумма вертикальных углов в два раза больше угла, смежного с обоими. Найдите эти углы.

1.53. На плоскости расположены 4 прямые (рис. 1.10). Известны углы между некоторыми из них: $\alpha = 110°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 80°$. Введите обозначения и найдите величины других углов, изображенных на данном рисунке.

1.54. Даны дополнительные полупрямые a_1 и a_2. От этих полупрямых в разные полуплоскости отложены углы α и β. Докажите, что если углы α и β равны, то они вертикальные.

1.55. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

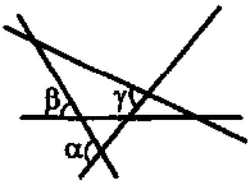


Рис. 1.10

Глава 2
РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Эта глава является очень важной для курса геометрии, т.к. без понятия «равенство треугольников» в курсе школьной геометрии обойтись не возможно.

Мы уже в 5–6 классах знакомились с некоторыми свойствами треугольников. Сейчас, в 7-ом классе, мы весь материал о треугольниках выстраиваем в единую систему.

2.1. ПОНЯТИЯ «РАВЕНСТВО ФИГУР» И «РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ»

Основное теоретическое содержание

В 5–6 классах мы изучали понятия равенства отрезков и углов. Дать общее определение равенства фигур мы пока не можем (нет нужных для этого знаний). Мы будем исходить из такого описания:

две фигуры равны, если они имеют одинаковую форму и размеры.

Более подробно мы изучим в этом разделе понятие «*равенство треугольников*».

Два треугольника равны, если их можно совместить наложением одного на другой.

Для решения задач и для изучения свойств треугольников приведенное выше описание можно расписать так:

Если два треугольника равны, то элементы (то есть стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника. В равных треугольниках против равных сторон (то есть совмещающихся при наложении) лежат равные углы; и наоборот: против соответственно равных углов лежат равные стороны.

Термины и обозначения

Равенство фигур обозначается знаком «=». Запись $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ читается так: «треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$».

Запись $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означает следующее: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, а также $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$.

2.1. На рисунке 2.1 изображен треугольник ABC. Ответьте на вопросы:

1. Какой угол заключен между сторонами BC и AB?
2. Какая сторона прилежит к углам A и B?
3. Между какими сторонами заключен $\angle C$?
4. К каким углам прилежит сторона BC?

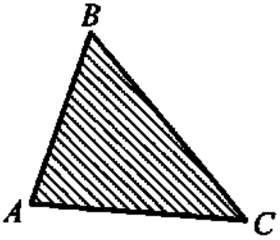


Рис. 2.1

2.2. На рисунке 2.2 изображены два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.

Назовите равные углы и стороны этих треугольников.

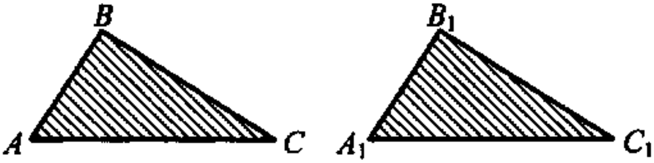


Рис. 2.2

2.3. Как можно узнать, равны ли: а) два отрезка; б) два угла?

2.4. При каких условиях следующие пары фигур будут равны: а) два отрезка; б) две прямые; в) два угла; г) две окружности; д) два квадрата; е) два треугольника?

2.5. Рассмотрите треугольник MHK. Придумайте простой метод, позволяющий, не делая чертежа, определить, какие стороны и углы заключены между какими углами и сторонами. Ответьте на вопросы:

1. Заключен ли $\angle H$ между MH и HK?
2. Прилежит ли сторона MK к углам M и K?

3. Какой угол заключен между сторонами *МН* и *МК*?

4. Какая сторона прилежит к углам *М* и *Н*?

2.6. Можно ли построить треугольник, стороны которого равны: а) 3 см, 4 см, 5 см; б) 3 см, 4 см, 7 см; в) 3 см, 4 см, 8 см?

2.7. Какие вы можете предложить способы, чтобы выяснить, что два треугольника равны?

2.8. Определите, верны ли следующие утверждения:

1. Треугольник, равный равнобедренному треугольнику, является равнобедренным.

2. Треугольник, равный остроугольному треугольнику, является тупоугольным.

3. Существуют два равных треугольника, один из которых является прямоугольным, а другой — тупоугольным.

4. В правильной пирамиде одна грань — остроугольный треугольник, а другая — тупоугольный треугольник.

2.9. Ответьте на вопросы:

1. Равна ли любая фигура самой себе?

2. Если каждая из двух фигур равна третьей, то равны ли первые две фигуры?

3. Равны ли стороны квадрата?

4. Равны ли стороны прямоугольника?

5. Равны ли противоположные грани куба?

6. Равны ли две смежные грани куба?

7. Равны ли две противоположные грани прямоугольного бруса, имеющего форму кирпича?

2.10. Какие пары фигур, изображенных на рисунке 2.3, *а–з*, равны?

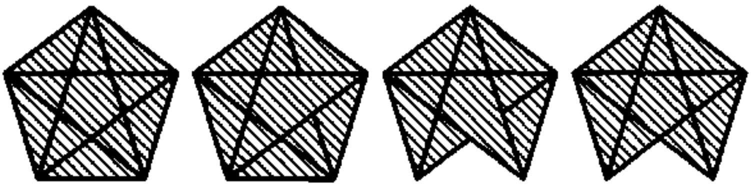
а) *б)* *в)*

г) *д)* *е)*

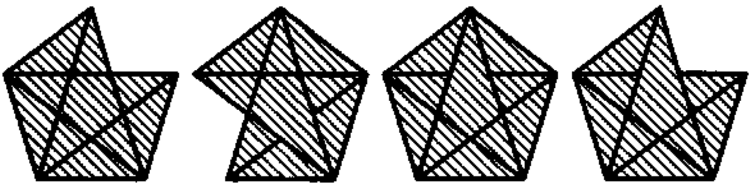
ж) *з)*

Рис. 2.3

2.11. Для какой из фигур, изображенных на рисунке 2.4, *а–з*, нельзя на этом же рисунке подобрать равную ей фигуру?



а) *б)* *в)* *г)*



д) *е)* *ж)* *з)*

Рис. 2.4

2.12. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.

1) $AB = 5$ см, $\angle A = 90°$. Чему равна сторона A_1B_1? Чему равен угол A_1?

2) $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$;

3) $\angle A = 34°$, $\angle B = 56°$. Какие углы треугольника $A_1B_1C_1$ можно найти?

4) $\angle A_1 = 76°$, $A_1B_1 = 10$ см, $C_1A_1 = 5$ см. Найдите $\angle A$, AB, CA.

2.13. Дано: $\Delta ABE = \Delta DCF$ (рис. 2.5). Заполните пропуски:

$\angle A = \angle D$; $\angle B = ...$; $\angle E = ...$;

$AB = ..$; $AE = ...$; $BE = ...$.

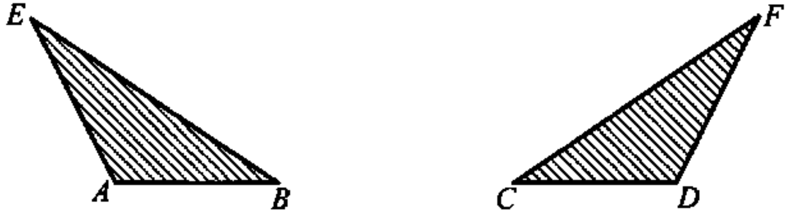
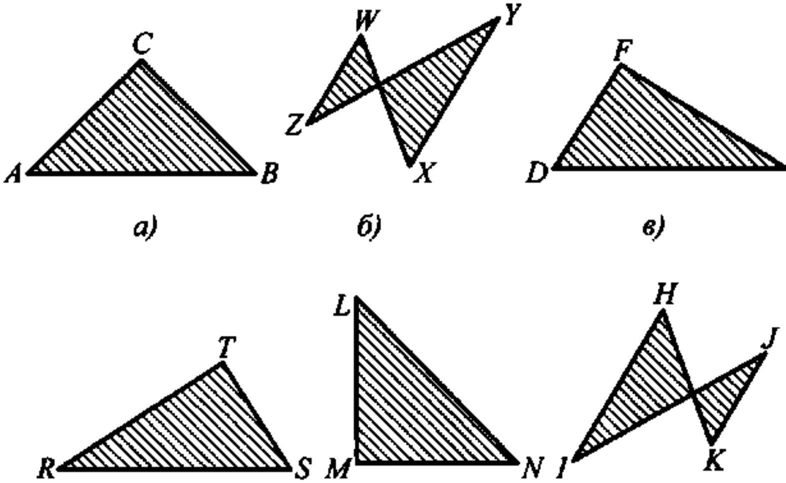


Рис. 2.5

2.14. Посмотрите на фигуры, изображенные на рисунке 2.6. Выпишите равные между собой фигуры.

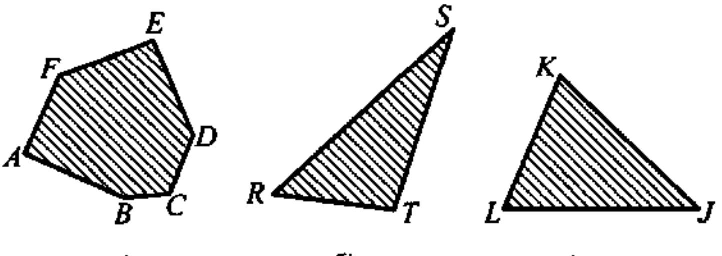


а) *б)* *в)*

г) *д)* *е)*

Рис. 2.6

2.15. Посмотрите на фигуры, изображенные на рисунке 2.7. Выпишите равные между собой фигуры.



а) *б)* *в)*

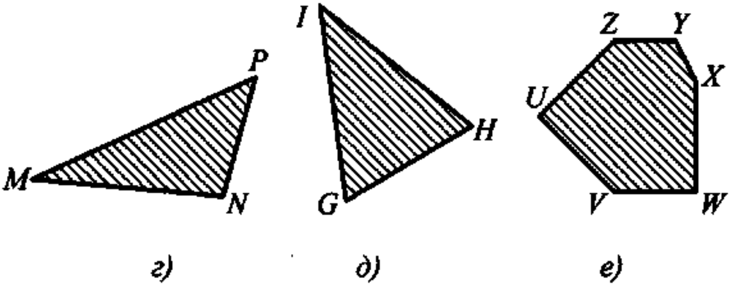
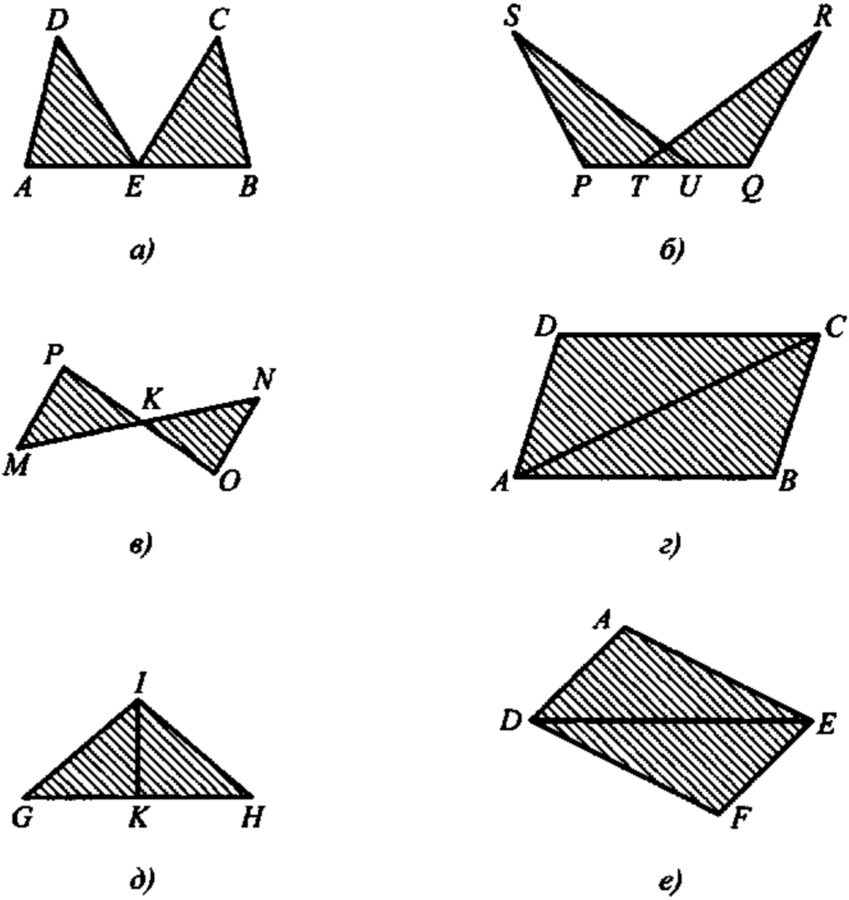
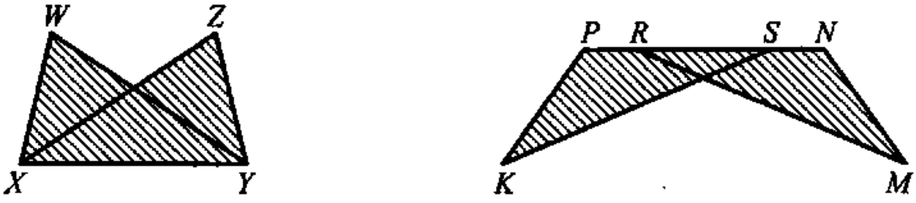


Рис. 2.7

2.16. Треугольники каждой из пар треугольников, изображенных на рисунке 2.8, *а–з,* равны. Запишите равные треугольники в каждой из данных пар треугольников.





ж) *з)*

Рис. 2.8

2.17. Гранями треугольной пирамиды являются равные треугольники OAB и OBC. Известно, что $OA = 4$ см, $AB = 8$ см, $BO = 10$ см. Найдите стороны треугольника OBC.

2.18. Придумайте условие, которое позволит узнать, равны ли два данных треугольника.

2.19. Какие из изображенных на рисунке 2.9, *а–е* фигур равны?

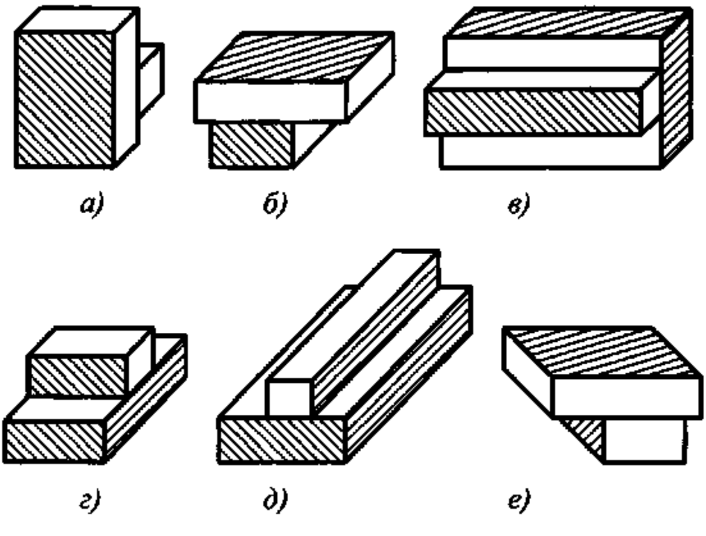


Рис. 2.9

2.20. Всегда ли можно построить треугольник по трем сторонам, если известно, что одна из них меньше суммы двух других? Приведите примеры.

2.2. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Основное теоретическое содержание

В геометрии есть три основных признака равенства треугольников.

ТЕОРЕМА 1. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (по трем сторонам).

ТЕОРЕМА 2. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними).

ТЕОРЕМА 3. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

2.21. Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 2.10). Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CBD$.

2.22. На рисунке 2.11 $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$ и $\angle ADB = \angle CDB$, т.е. BD — биссектриса углов ABC и ADC.

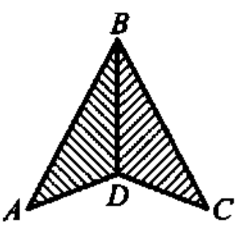


Рис. 2.10

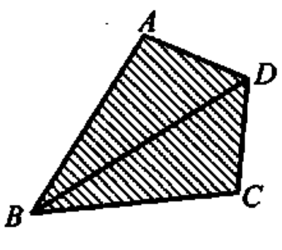


Рис. 2.11

2.23. Постройте треугольник ABC, у которого $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$ и $\angle B = 60°$. Если построить несколько треугольников ABC с теми же данными, то как будут соотноситься эти треугольники?

2.24. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\Delta APC = \Delta A_1P_1C_1$.

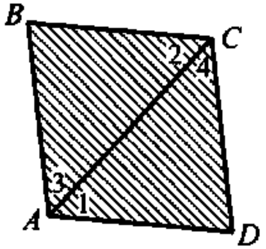


Рис. 2.12

2.25. Дано: $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 2.12). Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ACD$.

2.26. Дано: AD — биссектриса угла BAC, $AB = AC$ (рис. 2.13). Докажите, что $\Delta ABD = \Delta ADC$.

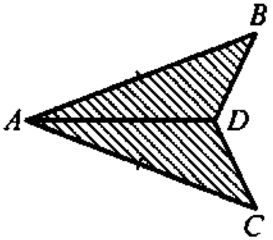


Рис. 2.13

2.27. На рисунке 2.14 отрезки AD и BC пересекаются в точке E, $BE = EC$, $AE = ED$. Докажите, что $\Delta ABE = \Delta CDE$.

2.28. На рисунке 2.15 BD — биссектриса $\angle MBN$, $BM = BN$. Докажите, что $MK = KN$.

2.29. На рисунке 2.16 $BC = AD$, $\angle DAC = \angle BCA$. Что можно доказать, исходя из данных задачи?

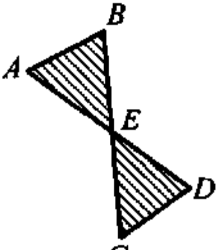


Рис. 2.14

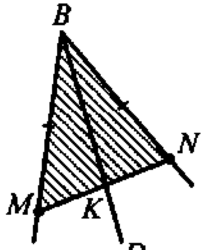


Рис. 2.15

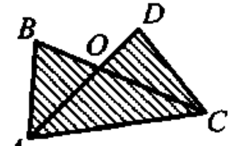


Рис. 2.16

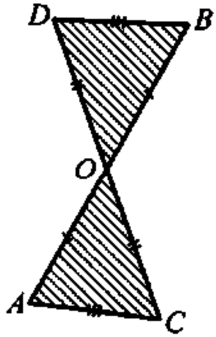


Рис. 2.17

2.30. На рисунке 2.17 точка O является пересечением отрезков AB и CD, $AO = OB$, $CO = OD$. Докажите, что $\angle COD$ развернутый.

2.31. На рисунке 2.18 отрезки AB и A_1B_1 пересекаются в точке C, $BC = CA$, $\angle A = \angle B$. Докажите, что $\Delta CBB_1 = \Delta CAA_1$.

2.32. На рисунке 2.19 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

2.33. На рисунке 2.20 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Что можно доказать исходя из данных этой задачи?

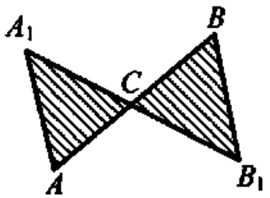


Рис. 2.18

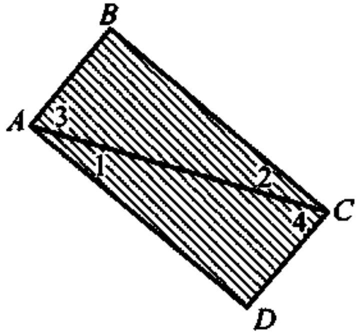


Рис. 2.19

2.34. Дана треугольная пирамида $OABC$. Грани OAB и OBC равны между собой. На ребре OB взята точка P и соединена с вершинами A и C (рис. 2.21). Докажите, что $\Delta APB = \Delta CPB$.

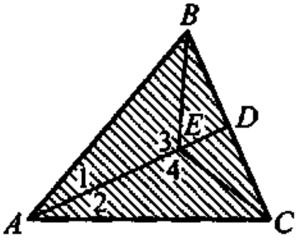


Рис. 2.20

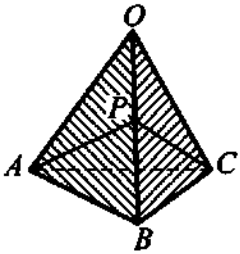


Рис. 2.21

2.35. Пользуясь одной лишь линейкой, постройте треугольник, любые две стороны которого не равны. Затем постройте второй треугольник, равный первому, и опишите действия, которые вы сделали. Ответьте на вопросы:

1. Существует лишь один способ построения второго треугольника равного первому или несколько?

2. Сколькими из шести элементов первого треугольника вы воспользовались при построении второго?

3. Каково наименьшее число попарно равных элементов, необходимое, чтобы гарантировать равенство данных треугольников?

2.36. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2.37. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB - BC = A_1B_1 - B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2.38. Отрезки AB и A_1B_1 имеют общую середину O. Докажите, что: а) отрезки AA_1 и BB_1 равны; б) середины отрезков A_1A и B_1B лежат на одной прямой, проходящей через точку O (рис. 2.22).

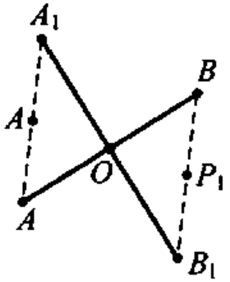


Рис. 2.22

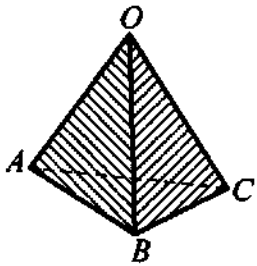


Рис. 2.23

2.39. Дан ΔABC. Если $\Delta ABC = \Delta BAC$ и $\Delta ABC = \Delta ACB$, то какое заключение можно сделать относительно ΔABC? Как доказать, что это заключение справедливо?

2.40. Если $\Delta ABC = \Delta DEF$ и $\Delta DEF = \Delta GNK$, то какое заключение можно сделать относительно ΔABC и ΔGNK? Как доказать, что это заключение справедливо? Сформулируйте теорему, обобщающую эту ситуацию.

2.41. На рисунке 2.23 изображена треугольная пирамида $OABC$. Ребро OA равно ребру OC, а ребро AB равно ребру CB. Докажите, что грани AOB и COB равны.

2.42. Для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются следующие равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Докажите, что либо эти треугольники равны, либо сумма углов с вершинами C и C_1 в этих треугольниках равна 180°.

2.43. При измерении длины озера (рис. 2.24) отметили на местности точки A, B и C, а затем еще две точки D и К так, чтобы точка C оказалась общей серединой отрезков AK и BD.

Измерив DK, получили 500 м и сделали вывод, что длина озера равна 500 м. Верно ли сделан этот вывод?

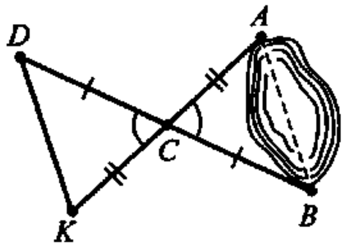


Рис. 2.24

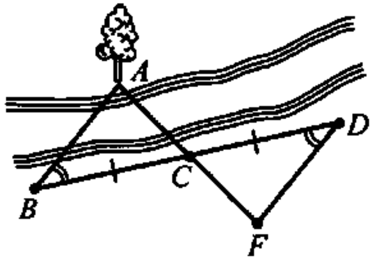


Рис. 2.25

2.44. Для нахождения расстояния от точки B до дерева A на другой стороне реки (рис. 2.25) отметили на местности точки C, D и F так, чтобы точка C была серединой отрезка BD и угол BDF был бы равен углу ABC. Наметив прямую AF, проходящую через точку C, измерили одну из сторон ΔFDC и приняли ее длину : расстояние AB. Какую сторону измерили?

2.45. Постройте треугольник, определяемый каждой системой заданных ниже элементов:

а) $\angle M = 30°$, $MO = 2$, $\angle O = 90°$;

б) $\angle B = 55°$, $AB = 5$, $BC = 3$;

в) $\angle G = 35°$, $GH = 6$, $HJ = 4$;

г) $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$;

д) $\angle M = 80°$, $MO = 2$, $\angle O = 120°$;

е) $DE = 8$, $EF = 3$, $DF = 4$;

ж) $DE = 4$, $DF = 8$, $\angle D = 60°$;

з) $\angle A = 70°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 50°$.

Если заданные числа допускают построение двух треугольников, то постройте оба. Если можно построить больше двух треугольников или нельзя построить ни одного, то объясните почему.

2.46. Постройте треугольник ABC, у которого $\angle A = 40°$, $AC = 6$ см и $CB = 4$ см. Затем постройте треугольник DEF, у которого $\angle D = 40°$, $DF = 6$ см и $FE = 4$ см. Обязательно ли ΔABC и ΔDEF равны?

2.47. На рисунке 2.26 изображены два треугольника ABE и CDB.

1) $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AE = CD$.

2) $AE = DC$, $DA = EC$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

3) $MA = EM$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB = BC$.

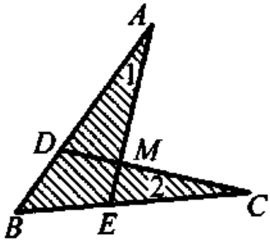


Рис. 2.26

2.48. Даны два равных треугольника ABC и DEM.

1. Известно, что $AB = DE$, $AC = DM$. Укажите углы треугольника ABC, равные углам D, E, M.

2. Докажите, что каждая биссектриса (медиана) треугольника ABC равна некоторой биссектрисе (медиане) треугольника DEM, равного треугольнику ABC.

Глава 3
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

3.1. ПОНЯТИЕ «ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ». ПОНЯТИЯ «ВЫСОТА», «МЕДИАНА» И «БИССЕКТРИСА» ТРЕУГОЛЬНИКА

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Две прямые называют перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пусть даны прямая a и не принадлежащая ей точка B. Рассмотрим прямую b, проходящую через точку B и перпендикулярную прямой a, и пусть A — точка пересечения этой прямой с прямой a. Отрезок AB называется перпендикуляром, опущенным из точки B на прямую a (рис. 3.1). Точка A называется основанием перпендикуляра. Длина перпендикуляра BA называется расстоянием от точки B до прямой a.*

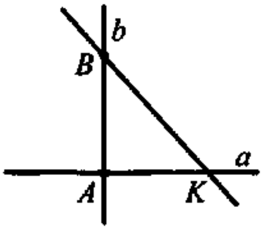


Рис. 3.1

Для произвольной точки K на прямой a, отличной от A, отрезок BK называется наклонной, проведенной из точки B к прямой a. Точка K называется основанием наклонной. Отрезок AK называется проекцией наклонной BK на прямую a (рис. 3.1).

ТЕОРЕМА 1. *К данной прямой через данную на ней точку в пространстве можно провести бесчисленное множество перпендикулярных к ней прямых.*

ТЕОРЕМА 2. *Если даны прямая и не принадлежащая ей точка, то через эту точку можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один.*

ТЕОРЕМА 3. *Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, короче всякой наклонной, проведенной из этой точки к этой прямой.*

ТЕОРЕМА 4. *Из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, больше та, проекция которой больше.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Проведем биссектрису BE угла B треугольника ABC. Отрезок BE биссектрисы с концами в вершине угла треугольника и на противоположной стороне треугольника называется биссектрисой угла треугольника (рис. 3.2).*

ТЕОРЕМА 5. *Все биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке (рис. 3.2).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника (рис. 3.3).*

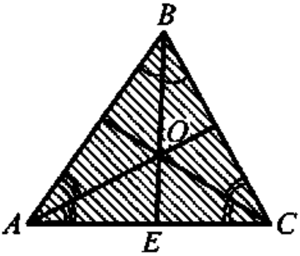


Рис. 3.2

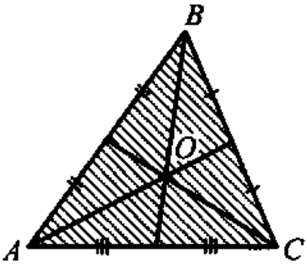


Рис. 3.3

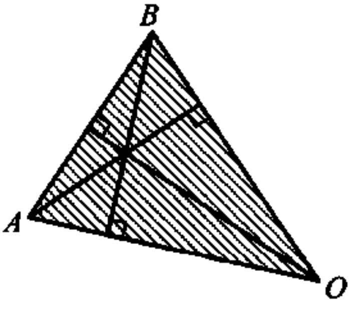


Рис. 3.4

ТЕОРЕМА 6. *Все медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 3.3).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Проведем перпендикуляр через какую-либо вершину треугольника к прямой, проходящей через две другие его вершины. Отрезок этого перпендикуляра от данной вершины до этой прямой называется высотой треугольника* (*рис. 3.4*).

ТЕОРЕМА 7. *Три прямые, на которых лежат высоты треугольника, имеют общую точку* (*рис. 3.4*).

Термины и обозначения

Для обозначения перпендикулярных прямых используется знак «$\perp$». Запись «$a \perp b$» читается: «прямая a перпендикулярна прямой b».

Для перпендикулярных прямых или отрезков возможна запись «$AB \perp CD$». Она читается так: прямые AB и CD (или отрезки AB и CD) перпендикулярны.

Для обозначения биссектрисы угла треугольника используется знак l_{AC}.

Читаем: биссектриса треугольника, проведенная к стороне AC.

Для медианы треугольника существует обозначение «m_{AB}». Читаем: медиана треугольника, проведенная к стороне AB.

Для высоты треугольника существует обозначение «h_{AC}». Читаем: высота треугольника, проведенная к стороне AC треугольника.

Задачи

3.1. На рисунке 3.5 изображены две взаимно перпендикулярные прямые MN и CD.

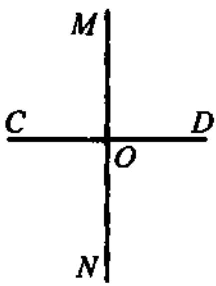


Рис. 3.5

1) Назовите вертикальные углы на этом рисунке.

2) Назовите пары смежных углов, имеющихся на рисунке 3.5.

3) Назовите равные углы на этом рисунке.

3.2. На рисунке 3.6 изображены прямая AB, перпендикулярная прямой DC и прямые AC и AD.

Как называются отрезки AD, AB и CA? Какими свойствами обладают прямые DA, AB, CA?

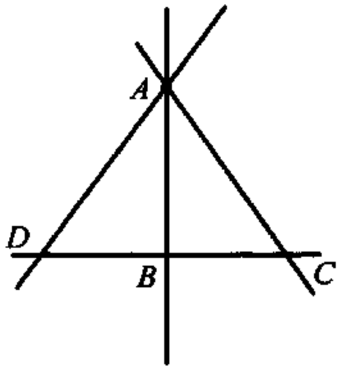


Рис. 3.6

3.3. На рисунке 3.7 ребра куба бесконечно продлены в обе стороны. Сколько взаимно перпендикулярных прямых, содержащих ребра куба, пересекаются в каждой вершине куба?

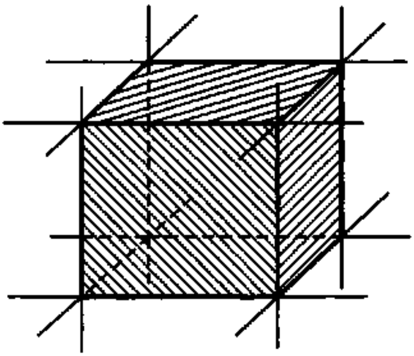


Рис. 3.7

3.4. В произвольном треугольнике проведите биссектрисы всех его углов. Какой вывод можно сделать о взаимном расположении биссектрис углов данного треугольника?

3.5. В треугольнике ABC проведены две медианы AD и BM (рис. 3.8). назовите равные отрезки на этом рисунке.

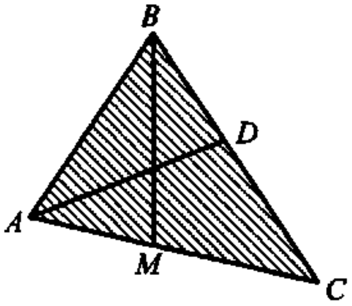


Рис. 3.8

3.6. Сколько высот имеет треугольник? Каким свойством обладают высоты треугольника?

3.7. Что надо знать о расположении двух прямых, чтобы утверждать, что эти прямые перпендикулярные?

3.8. На рис. 3.9 изображена прямая *a* и точка *B*, не принадлежащая этой прямой. Из точки *B* к прямой а проведен перпендикуляр *BA* и две наклонные *BC* и *BD*. Ответьте на вопросы:

1. Какой из отрезков *BA*, *BC*, *BD* имеет меньшую длину? Почему?
2. Сколько пар смежных углов образуется при этом?
3. Назовите прямые углы, получившиеся на рисунке.
4. Назовите треугольники, имеющиеся на этом рисунке.

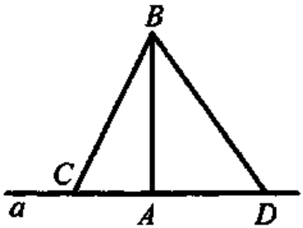


Рис. 3.9

3.9. Даны прямая и точка, принадлежащая этой прямой. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через данную точку?

3.10. Дана прямая и точка, не принадлежащая этой прямой. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через данную точку?

3.11. Дана прямая a и точка B. Через точку B проведены две прямые, пересекающие прямую a. Могут ли эти прямые быть перпендикулярными прямой a?

3.12. В произвольном треугольнике проведите при помощи масштабной линейки все медианы. Пересеклись ли они в одной точке?

3.13. Может ли высота треугольника находиться вне треугольника?

3.14. Могут ли все основания высот треугольника располагаться: а) на сторонах треугольника; б) на продолжениях сторон?

3.15. Может ли только одно основание высоты треугольника располагаться на продолжении стороны треугольника?

3.16. При помощи чертежного угольника проведите все высоты остроугольного треугольника. Пересеклись ли они в одной точке?

3.17. При помощи чертежного угольника проведите высоты прямоугольного треугольника. Пересеклись ли они в одной точке?

3.18. При помощи чертежного угольника проведите высоты тупоугольного треугольника. Имеют ли высоты общую точку?

3.19. На рисунке 3.10 прямые a и b перпендикулярны, они пересекаются в точке O. Через точку O проходит еще одна прямая c. $\angle 1 = 50°$. Найдите углы 2, 3 и 4.

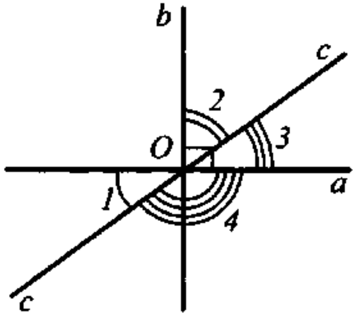


Рис. 3.10

3.20. Из точки O проведены лучи OA, OB и OC, причем $OB \perp OA$ (рис. 3.11). Угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC, равен 75°. Найдите углы AOB, BOC и AOC.

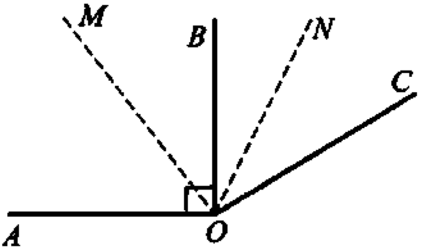


Рис. 3.11

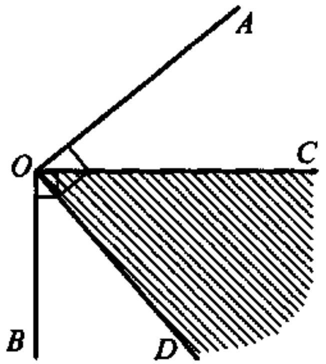


Рис. 3.12

3.21. Даны два угла AOB и COD с общей вершиной. Стороны одного угла перпендикулярны к сторонам другого (рис. 3.12). Найдите эти углы, если разность между ними равна прямому углу.

3.22. Могут ли быть перпендикулярными прямые OB и OC, если $\angle AOB = \angle AOC$? Обоснуйте ваш вывод.

3.23. Прямые a и b пересекаются под углом 30°, прямые a и c пересекаются под углом 40°. Могут ли прямые b и c быть перпендикулярными?

3.24. Два равных тупых угла имеют общую сторону, а две другие стороны взаимно перпендикулярны. Найдите величину тупого угла.

3.25. Докажите, что из любой точки, лежащей вне прямой, можно провести только один перпендикуляр к этой прямой, и он меньше наклонной, проведенной к той же прямой из этой же точки.

3.26. Из вершины развернутого угла проведены два луча, которые делят его на три равные части. Покажите, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

3.27. Докажите, что сумма каждых трех углов, не прилежащих один к другому и образуемых тремя прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.

3.28. Докажите, что сумма каждых пяти углов, не прилежащих один к другому и образуемых пятью прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.

3.2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Треугольник называют прямоугольным, если у него есть прямой угол. Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называют катетами, а сторону, противолежащую прямому углу, — гипотенузой.*

Термины и обозначения

При решении задач на зависимости между элементами прямоугольного треугольника будем пользоваться обозначениями: a и b — длины катетов; c — длина гипотенузы; h_c — длина высоты, проведенной из вершины прямого угла; a_c и b_c — длины проекций катетов a и b на гипотенузу c.

Важное замечание. Этот раздел расположен так, что у нас пока нет теоремы о сумме углов треугольника. В связи с этим у нас пока нет признаков равенства прямоугольных треугольников. Эта теорема и соответствующие признаки появляются позднее. Следует понимать эту особенность и использовать ее при решении задач.

Задачи

3.29. Найдите на рисунке 3.13 равносторонний, равнобедренный, разносторонний, остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольники.

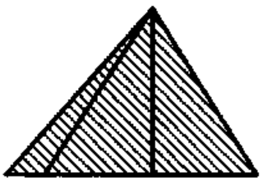


Рис. 3.13

3.30. На рисунке 3.14 изображен прямоугольный треугольник *ABC*. Как называются стороны этого треугольника *AB* и *AC*? Какими свойствами обладают отрезки *AB* и *AC*?

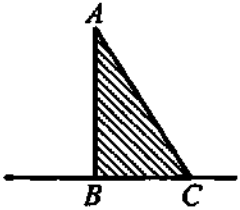


Рис. 3.14

3.31. На рисунке 3.15 изображен треугольник *ABC* и его высота *CM*. Какую величину имеют углы 1 и 2? Назовите прямоугольные треугольники, которые есть на этом рисунке.

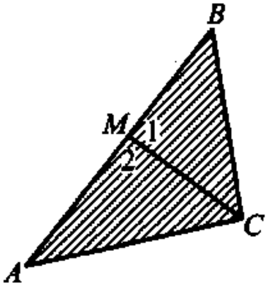


Рис. 3.15

3.32. Сколько элементов и какие однозначно определяют прямоугольный треугольник?

3.33. Дан прямоугольный треугольник *ABC* с катетами *AB* и *BC*. Как расположены высоты этого треугольника.

3.34. Какими свойствами должны обладать элементы треугольника, чтобы этот треугольник можно было назвать прямоугольным?

3.35. Может ли у прямоугольного треугольника быть две равные стороны? Как называется такой треугольник?

3.36. Построить три равнобедренных треугольника: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.

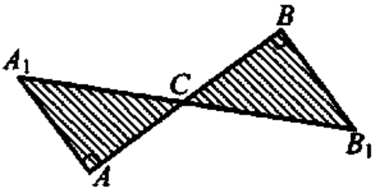


Рис. 3.16

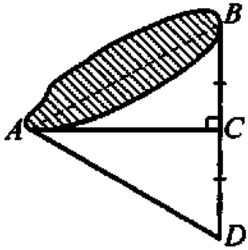


Рис. 3.17

3.37. На рисунке 3.16 $BB_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AB$, $AC = CB$. Докажите, что $\Delta CBB_1 = \Delta CAA_1$. Что следует из равенства этих треугольников?

3.38. Для измерения длины озера на местности выполнили построение, показанное на рисунке 3.17 ($AC \perp BD$, $CD = BC$). Какое расстояние нужно измерить на местности, чтобы узнать длину озера?

3.39. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе равна половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

3.40. Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и гипотенузе; в) по катету и прилежащему к нему острому углу; г) по катету и противолежащему ему острому углу; д) по гипотенузе и острому углу.

3.41. Построить прямоугольный треугольник по сумме его катетов $a + b$ и гипотенузе c.

3.42. Построить прямоугольный треугольник по его катету a и сумме другого катета с гипотенузой $b + c$.

3.3. СВОЙСТВА ВЫСОТЫ, МЕДИАНЫ И БИССЕКТРИСЫ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Основное теоретическое содержание

ТЕОРЕМА 1. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

ТЕОРЕМА 2. *В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно и медианой, и высотой.*

Эти две теоремы очень часто используются при решении геометрических задач. Именно по этому им и их приложениям посвящен отдельный раздел нащего задачника.

3.43. В равнобедренном треугольнике ABC AB — основание (рис. 3.18), $\angle A = 60°$. Найдите $\angle B$.

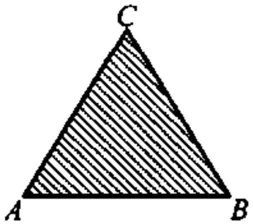


Рис. 3.18

3.44. В каких треугольниках биссектрисы не совпадают с медианами и высотами?

3.45. В каких треугольниках биссектрисы совпадают с медианами и высотами? При каких условиях это может быть?

3.46. Постройте равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 6 см так, чтобы его угол при вершине B был: а) острый; б) прямой.

В построенных треугольниках проведите высоты к боковым сторонам. Запишите перпендикулярность высот соответствующим сторонам.

3.47. Угол, смежный углу при основании равнобедренного треугольника, равен 114°. Найдите углы при основании.

3.48. Угол, вертикальный углу при вершине равнобедренного треугольника, равен 140°. Найдите угол между боковой стороной и высотой, проведенной к основанию.

3.49. Угол, смежный углу при вершине равнобедренного треугольника, равен 82°. Найдите угол между боковой стороной и медианой, проведенной к основанию.

3.50. Постройте равнобедренный треугольник, основание которого имеет длину 4 см, а медиана при вершине 1,5 см.

3.51. Восстановите равнобедренный треугольник по трем его точкам: точке, лежащей на боковой стороне, одной вершине и середине основания.

3.52. Постройте равнобедренный треугольник по высоте и углу при вершине (с помощью циркуля, чертежного треугольника и транспортира).

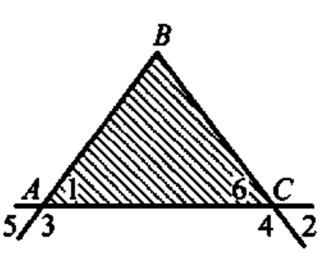


Рис. 3.19

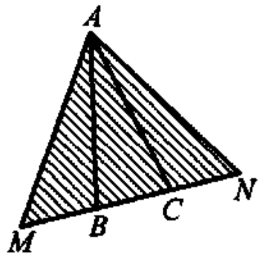


Рис. 3.20

3.53. В ΔABC $AB = BC$ (рис. 3.19).
Докажите, что а) $\angle 5 = \angle 2$; б) $\angle 3 = \angle 4$.

3.54. ΔBAC — равнобедренный с вершиной A, на прямой BC отметим точки M и N так, что $MB = CN$ (рис. 3.20).

Докажите, что ΔMAN — равнобедренный.

3.55. Построить равнобедренный треугольник по основанию и биссектрисе угла при вершине с помощью циркуля и чертежного треугольника.

3.56. Докажем теорему, которая лежит в основе всего этого раздела. 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является также его медианой и высотой.

3.57. Постройте равнобедренный треугольник: а) по основанию а и боковой стороне b; б) по боковой стороне b и высоте h, проведенной к основанию; в) по основанию a и высоте h, проведенной к основанию.

3.58. Через внутреннюю точку данного угла проведите прямую, отсекающую от сторон этого угла равные отрезки.

3.59. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

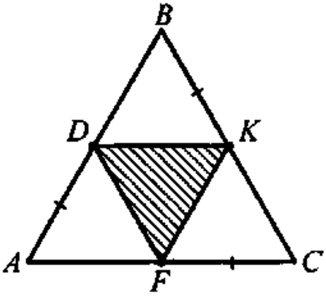


Рис. 3.21

3.60. В равнобедренной треугольнике ABC с вершиной B проведите медианы AD и CF к боковым сторонам. Докажите, что: а) $\Delta ADC = \Delta CFA$; б) $\Delta ADB = \Delta CFB$.

3.61. В равнобедренном треугольнике ABC с вершиной B проведите его биссектрисы AD и CF. Докажите, что: а) $\Delta ADB = \Delta CFB$; б) $\Delta ADC = \Delta CFA$.

3.62. В равностороннем треугольнике ABC (рис. 3.21) на сторонах отмечены точки D, K и F так, что $AD = BK = CF$. Докажите, что ΔFDK имеет равные углы.

3.63. Середины боковых сторон равнобедренного треугольника соединены отрезками с серединой его основания. Докажите, что образовавшиеся при этом треугольники равны.

3.64. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и F так, что $AK = CF$. Проведены отрезки BK и BF. Докажите, что $\angle ABK = \angle CBF$.

3.65. В равнобедренном треугольнике найдите неизвестные стороны, если: а) боковая сторона на 5 см больше основания, а периметр равен 31 см; б) основание составляет $\frac{2}{3}$ боковой стороны, а периметр 24 см; в) отношение боковой стороны к основанию равно 5 : 6, а периметр равен 48 см; г) основание 18 см, высота, проведенная к основанию, 40 см, а периметр одного из треугольников, на которые высота разбивает этот треугольник, равен 90 см.

3.66. Начертите два треугольника ABC и ADC с общей стороной AC так, чтобы вершины B и D лежали по разные стороны от прямой AC и $AB = AD$, а $BC = CD$. Докажите, что $BD \perp AC$.

3.67. Возьмите точку M внутри равностороннего треугольника ABC и опустите перпендикуляры MP, MQ и MR на его стороны (рис. 3.22). Оказывается, что сумма этих отрезков не зависит от выбора точки M и равна высоте треугольника. Докажите, что

$$AP + BQ + CR = BP + CQ + AR,$$

а также, что

$$AP^2 + BQ^2 + CR^2 = BP^2 + CQ^2 + AR^2.$$

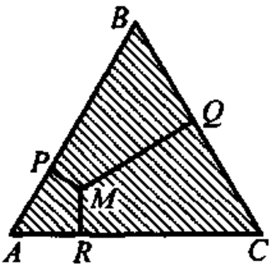


Рис. 3.22

3.68. Докажите, что две высоты, проведенные из концов основания равнобедренного треугольника, равны. Верно ли аналогичное свойство для медиан и биссектрис?

3.69. (Признаки равнобедренного треугольника). Докажите: Если в треугольнике ABC выполняется одно из следующих условий: 1) $\angle BAC = \angle BCA$; 2) биссектриса и высота, выходящие из вершины B, совпадают: 3) высота и медиана, выходящие из вершины B, совпадают; 4) медиана и биссектриса, выходящие из вершины B, совпадают, то этот треугольник равнобедренный, причем $AB = BC$ (рис. 3.23).

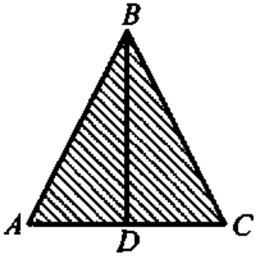


Рис. 3.23

Глава 4
ПЕРВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

В геометрии есть очень важный вид задач — *задачи на построение*. Эти задачи не являются отдельным разделом курса, а встречаются во всех его темах. Вместе с тем есть задачи, которые лежат в основе этого процесса. Вот первые задачи на построение мы и рассмотрим в этой главе нашего задачника.

Основное теоретическое содержание

Основными инструментами, с помощью которых выполняют построение фигур, являются *линейка и циркуль*.

С помощью линейки можно построить (в виде отрезка) следующие фигуры:

а) часть произвольной прямой;

б) часть прямой, проходящей через данную точку;

в) часть прямой, проходящей через две данные точки.

С помощью циркуля можно:

а) построить окружность данного радиуса с центром в данной точке;

б) отложить данный отрезок на данной прямой от данной точки.

Полное решение задач на построение состоит из четырех этапов.

Этап 1. Анализ. Не имея плана решения задачи, невозможно выполнить даже самое простое построение. Первый этап, определяющий такой план, называют *анализом*. На этом этапе мы рассуждаем так:

Пусть задача решена и мы построили нужную нам фигуру.

Как мы будем строить эту фигуру с помощью циркуля и линейки?

Какова будет последовательность выполнения построений?

Этап 2. Построение. Этот этап подробно описывает все шаги выполняемого построения.

Этап 3. Доказательство. На этом этапе происходит доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

Этап 4. Исследование. Этот этап предусматривает ответы на следующие вопросы:

Сколько решений можно получить?

Нельзя ли получить еще какую-нибудь фигуру с указанными в условии свойствами?

На практике некоторые этапы решения иногда опускаются или о них говорится очень кратко.

Кроме линейки и циркуля, используются и другие инструменты для геометрических построений: чертежный треугольник, угольник и транспортир, но об использовании этих инструментов в задачах должно быть особо сказано.

С помощью чертежного треугольника (рис. 4.1 а) можно строить прямую b, проходящую через данную точку O и пересекающую данную прямую a под углом, который равен соответствующему углу чертежного треугольника.

Кроме этого с помощью чертежного треугольника можно построить перпендикулярные и параллельные прямые (рис. 4.1 б, в), а можно выполнять и другие построения.

С помощью угольника удобно строить перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку (рис. 4.2).

С помощью транспортира можно строить угол, равный данному (рис. 4.3).

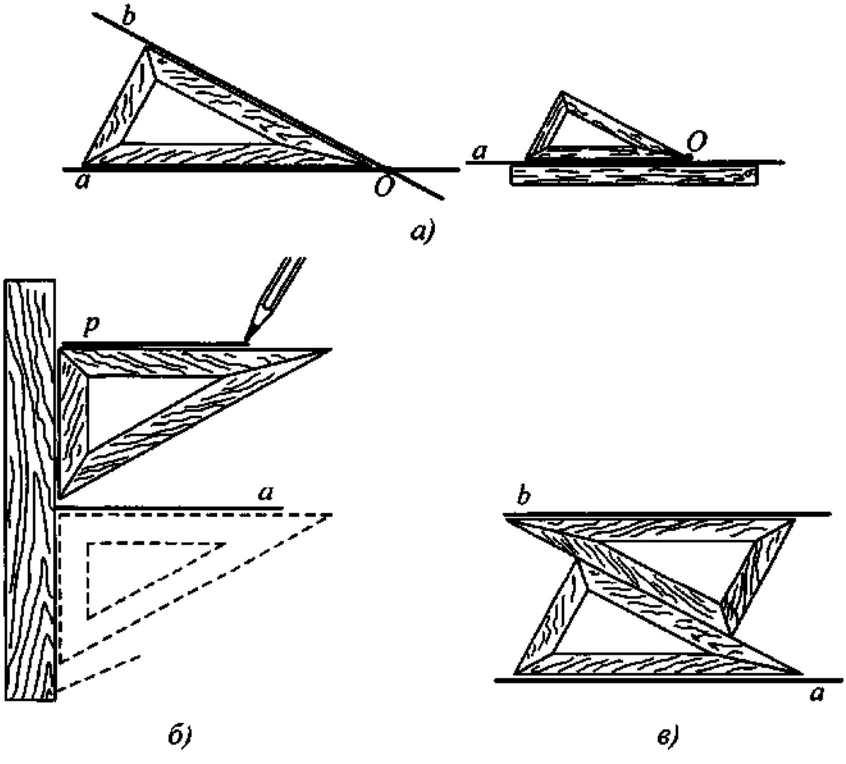


Рис. 4.1

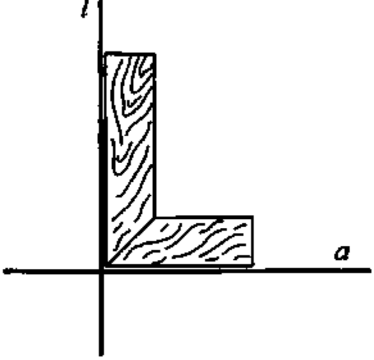


Рис. 4.2

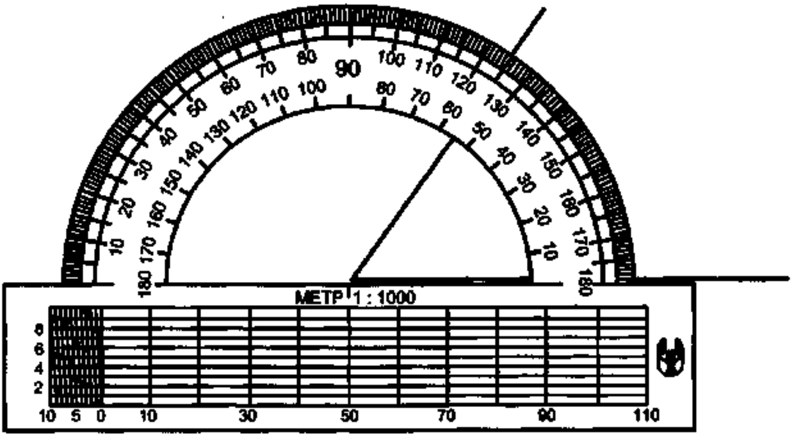


Рис. 4.3

Задачи

4.1. Перечислите инструменты, с помощью которых решаются задачи на построение.

4.2. Какие фигуры можно построить с помощью: а) линейки; б) циркуля?

4.3. С помощью каких инструментов можно на прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному?

4.4. Построения, выполненные с помощью каких инструментов, в геометрии считаются точными?

4.5. Какие построения нельзя выполнить с помощью: а) одной линейки; б) одного циркуля.

4.6. Сколько можно построить углов, равных данному углу A и имеющих одной из своих сторон данный луч OL?

4.7. Какие построения можно выполнить с помощью чертежного треугольника?

4.8. Какие построения можно выполнить с помощью транспортира?

Начнем решение учебных задач с классических задач на построение, которые есть практически в каждом учебнике по геометрии.

4.9. Постройте отрезок, равный данному отрезку и отложенный на данной прямой от данной на ней точки.

4.10. Постройте угол, равный данному, одна из сторон которого совпадает с данным лучом.

4.11. Постройте биссектрису данного угла.

4.12. Постройте треугольник по трем сторонам a, b, c.

4.13. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

4.14. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Перейдем к решению различных учебных задач на построение. Эти задачи довольно простые, при их решении можно и нужно ссылаться на решение основных задач на построение. Вместе с тем каждый раз не нужно описывать все те шаги построения, которые выполнялись в этих задачах, на них можно просто ссылаться.

4.15. При помощи циркуля и линейки постройте угол, равный данному углу и имеющий своей вершиной точку, лежащую: 1) внутри данного угла; 2) вне данного угла; 3) на стороне данного угла.

4.16. При помощи циркуля и линейки построить угол, равный сумме двух данных углов.

4.17. Постройте прямой угол.

4.18. Постройте угол в 45° и в 22,5°.

4.19. Разделите данный угол на четыре равные части.

4.20. Постройте угол вдвое больший данного острого угла.

4.21. Постройте треугольник, равный данному.

4.22. Постройте равносторонний треугольник по его стороне.

4.23. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

4.24. Начертите треугольник и постройте его медианы.

4.25. Дан треугольник. Постройте его биссектрисы.

4.26. Начертите треугольник ABC и постройте треугольник, у которого $\angle P = \angle A$, $\angle K = \angle B$ и $PK = 2AB$.

4.27. Дан остроугольный разносторонний треугольник ABC. Постройте треугольник CDA, равный треугольнику ABC, так, чтобы вершины B и D лежали по одну сторону от прямой AC.

4.28. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне, в 2 раза большей длины данного отрезка, и по углу, противолежащему основанию и равному данному тупому углу.

4.29. Дан треугольник ABC с тупым углом A. Постройте треугольник ADC, равный треугольнику ABC, так, чтобы вершины B и D лежали по разные стороны от прямой AC.

4.30. На данной прямой постройте точки, находящиеся на данном расстоянии от данной точки. Сколько решений может иметь задача?

4.31. Построить треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

4.32. Пользуясь одной лишь линейкой, постройте треугольник, все стороны которого имеют разную длину (не равны между собой). Затем постройте второй треугольник, равный первому, и опишите шаги, которые вы сделали. Сколько существует способов построения второго треугольника? Сколькими из шести элементов первого треугольника вы воспользовались для построения второго? Какое наименьшее число попарно равных элементов нужно взять, чтобы гарантировать равенство этих треугольников?

4.33. Пользуясь линейкой, разделите данный угол пополам.

4.34. Через данную точку проведите прямую, пересекающую данную прямую под данным углом.

4.35. Постройте треугольник ABC так, чтобы угол B равнялся данному острому углу P, а BA и $BC + CA$ соответственно двум данным отрезкам a и b ($a < b$).

4.36. Построить треугольник ABC по следующим данным: $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $AC + CB = m$.

4.37. Постройте треугольник ABC по стороне BC, медиане BM и высоте BH ($BC > BH$, $BM > BH$).

4.38. Постройте треугольник ABC так, чтобы угол A равнялся данному острому углу, а AB и $AC - BC$ соответственно двум данным отрезкам PQ и P_1Q_1 ($PQ > P_1Q_1$).

4.39. Постройте треугольник ABC по сторонам AC и BC и медиане CM.

4.40. Постройте биссектрису угла, вершина которого не поместилась на рисунке.

4.41. Дан отрезок $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $AC + CB = m$. Постройте ΔABC.

Глава 5
СИММЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Есть такие понятия, которые пронизывают всю нашу жизнь. Одним из них является *симметрия,* что в переводе с греческого означает «соразмерность».

Под словом «симметрия» мы подразумеваем совпадение, согласованность размеров. Для людей симметрия прежде всего означает правильность форм — человеческого тела, других живых существ, растений.

Мы в этой главе познакомимся с двумя видами симметрий: центральная симметрия (симметрия относительно точки) и осевая симметрия (симметрия относительно прямой).

5.1. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Основное теоретическое содержание

Введем поскорее очень важные и серьезные понятия геометрии, которые в дальнейшем будут подробно изучаться.

В геометрии есть более общее понятие — *преобразование фигуры.*

Существует такой раздел геометрии, который называется «*Геометрические преобразования*». Мы лишь познакомимся с некоторыми исходными понятиями этого раздела.

Пусть дана некоторая фигура F и каждой точке фигуры F поставлена в соответствие по некоторому правилу единственная точка плоскости. Множество построенных точек является некоторой фигурой F', чаще всего отличной от F.

В этих случаях говорят, что фигура F' получена из фигуры F некоторым *преобразованием.*

Среди геометрических преобразований есть очень важный их вид — *изометрии* (в традиционной литературе их называют движениями).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Преобразование фигуры называется изометрией, если при этом сохраняется расстояние между соответствующими точками.*

Очень важно, что *при изометрии фигура переходит в равную ей фигуру.*

Рассмотрим определение и некоторые свойства *центральной симметрии.*

Дадим определение *точек, симметричных друг другу относительно центра симметрии:*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Две точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O, если точка O — середина отрезка AA_1. Точка O называется центром симметрии точек A и A_1. Точка O считается симметричной самой себе.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Центральной симметрией данной фигуры с центром в точке O называется такое преобразование, при котором каждая точка данной фигуры переходит в симметричную ей точку. Точка O называется центром симметрии этих фигур.*

Существуют фигуры, симметричные друг другу относительно некоторого центра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Фигура, в которую при центральной симметрии переходит данная фигура, называется фигурой, симметричной данной относительно центра симметрии.*

В учебниках, которые мы выпустили за последнее время вместо термина «движение» мы используем термин «изометрия». В связи с этим имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Центральная симметрия является изометрией.*

Некоторые фигуры имеют центр симметрии. Это значит, что для каждой точки этой фигуры центрально-симметричная ей точка также принадлежит этой фигуре. Такие фигуры называют *центрально-симметричными.* Например, отрезок — центрально-симметричная фигура, центром симметрии которой служит его середина; прямая — центрально-симметричная фигура относительно любой ее точки; окружность — центрально-симметричная фигура относительно ее центра.

Термины и обозначения

Центральная симметрия с центром в точке O обозначается Z_O. Здесь $Z_O(X) = X_1$ читается так: при центральной симметрии с центром O точка X переходит в точку X_1.

Задачи

5.1. На рис. 5.1 изображены два симметричных друг другу относительно центра куба. Ответьте на следующие вопросы:

1) Какая точка является центром симметрии?

2) В какие точки, перейдут при этой симметрии вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

3) Какие точки симметричны вершинам A_1' и D_1' куба $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$?

4) Назовите равные отрезки на этом рисунке.

5) Назовите равные фигуры на этом рисунке.

5.2. Приведите примеры фигур, имеющих центр симметрии.

5.3. Перечислите некоторые основные свойства центральной симметрии.

5.4. Какая точка при центральной симметрии переходит сама в себя?

5.5. Какие прямые при центральной симметрии переходят в себя?

5.6. Как найти центр симметрии, если центральная симметрия задана парой соответствующих точек A и A_1?

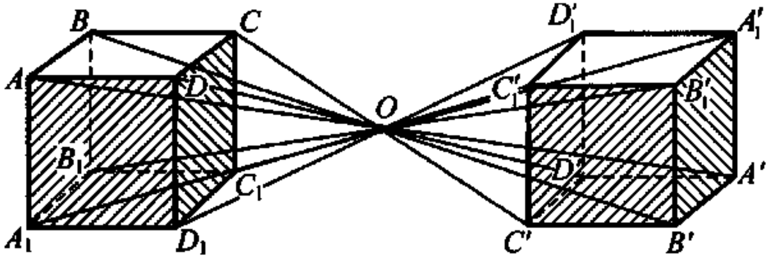
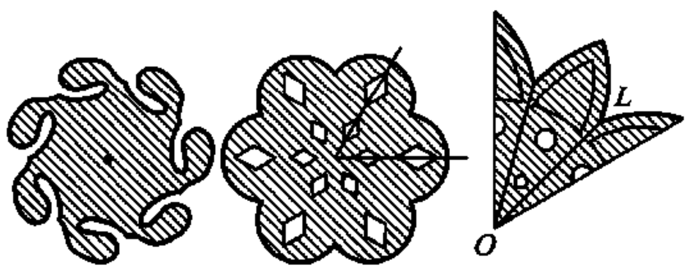


Рис. 5.1



а) *б)* *в)*

Рис. 5.2

5.7. В какую фигуру при центральной симметрии с центром *B* переходит угол *ABC*?

5.8. В какую фигуру переходит окружность при симметрии относительно ее центра?

5.9. Какие из фигур на рис. 5.2 имеют центр симметрии?

5.10. Имеет ли центр симметрии: а) отрезок; б) прямая; в) луч; г) куб; д) шар; е) треугольная пирамида?

5.11. Существуют ли фигуры, имеющие несколько центров симметрии?

5.12. Существует ли у прямоугольника центр симметрии?

5.13. Даны точки *A* и *O*. Постройте точку A_1, симметричную точке A относительно точки *O*.

5.14. Дан угол *AOB* (рис. 5.3). Постройте угол, симметричный углу *AOB* относительно точки *O*.

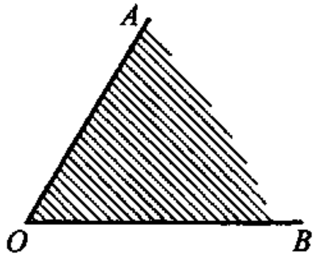


Рис. 5.3

5.15. Даны точки *O*, *A*, *B*, *C*, *D*.

1) Постройте точки, симметричные точкам *A*, *B*, *C* и *D* относительно точки *O*. В какие точки при этой симметрии перейдут полученные точки? Опишите процесс построения симметричных точек. Изменится ли решение задачи, если точки *A*, *B*, *C*, *D* не лежат в одной плоскости?

2) Соедините точки *A*, *B*, *C*, *D* отрезками. Какие расстояния сохранятся при выполнении симметрии относительно точки *O*? В какую фигуру перейдет полученная фигура? Попробуйте расположить точки *A*, *B*, *C* и *D* так, чтобы при соединении их отрезками получились разнообразные фигуры. Что можно сказать об этих фигурах?

5.16. Постройте отрезок, симметричный отрезку *AB* относительно данного центра *O*.

5.17. Постройте прямую, симметричную данной прямой *AB* относительно данного центра *O* (точка *O* принадлежит прямой *AB*).

5.18. Дана окружность с центром в точке O и радиусом R. В какую фигуру перейдет эта окружность при симметрии: а) относительно точки O; б) относительно точки M, принадлежащей окружности?

5.19. Постройте фигуры, центрально-симметричные фигурам, изображенным на рис. 5.4. В каждом случае выберите интересующий вас центр симметрии.

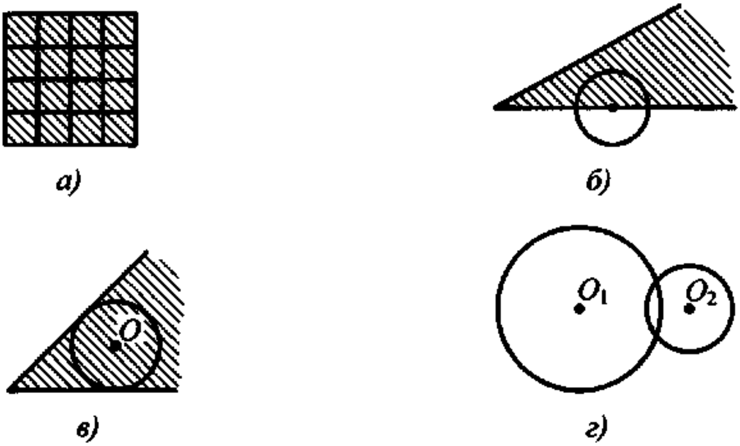


Рис. 5.4

5.20. Треугольник ABC при симметрии относительно центра О переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Постройте эти симметричные треугольники и найдите стороны A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 4$ см, $BC = 10$ см, $CA = 12$ см. В какую точку перейдет при этой симметрии точка M — середина стороны BC? Чему равно расстояние B_1M_1?

5.21. В круге с центром O и радиусом R взята точка A, удаленная от центра на расстояние 2 см. Постройте фигуру, в которую данный круг перейдет при симметрии относительно точки A. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов.

5.22. Докажите, что центральная симметрия является изометрией.

5.23. Окружность симметрична относительно своего центра.

5.24. Постройте треугольник, центрально-симметричный равностороннему треугольнику относительно его центра. Пусть сторона данного треугольника равна 1. Вычислите периметр объединения и пересечения исходного и полученного треугольников.

5.25. Нам нужно измерить расстояние между двумя точками A и B, разделенными препятствием (рис. 5.5).

Рис. 5.5

5.26. Нарисуйте треугольную пирамиду. Постройте фигуру, в которую перейдет эта пирамида в результате центральной симметрии относительно: а) вершины; б) середины ребра; в) центра основания; г) середины отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром противоположной грани.

5.27. Нарисуйте куб. Постройте фигуру, в которую перейдет этот куб в результате центральной симметрии относительно: а) вершины; б) середины ребра; в) центра грани; г) центра куба.

5.28. Фигура F_2 симметрична фигуре F_1 относительно центра O. Будет ли центрально-симметричным объединение этих фигур? Их пересечение?

5.29. Докажите, что никакой треугольник не может иметь центра симметрии.

5.30. 1. Дан отрезок MN и угол O.

2. Постройте ΔABC, у которого сторона AC вдвое меньше стороны BC и равна отрезку MN, а $\angle A = \dfrac{\angle O}{2}$.

5.31. Заданы отрезок AB и прямая a. Постройте треугольник ABC со стороной AB так, чтобы вершина C лежала на прямой a и чтобы $AC = 2AB$.

5.32. 1. Дан угол Q и отрезок MN.

2. Постройте ΔABC, у которого $\angle A$ вдвое больше угла B и равный данному углу Q, а сторона AB равна данному отрезку MN.

5.33. Для игры нужен прямоугольный лист бумаги и какие-либо фигуры одинаковой и симметричной формы, например пластинки домино или монеты одинакового достоинства, или спичечные коробки и т.п. Количество фигур должно быть достаточным, чтобы покрыть весь лист бумаги. Играют двое. Игроки по очереди кладут фигуры в любых положениях на любое свободное место листа бумаги до тех пор, пока их класть будет некуда.

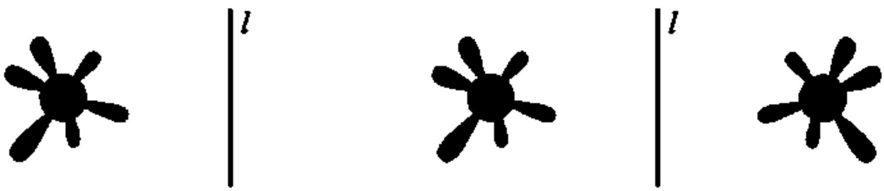
Передвигать положенные на бумагу фигуры не разрешается. Считается выигравшим тот, кто положит предмет последним. Задача: Найти способ ведения игры, при котором начинающий игру обязательно выигрывает.

5.34. Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних (с самого начала) лепестка. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Докажите, что девочка, делающая ход второй, всегда может выиграть (у ромашки больше 2-х лепестков).

5.2. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Основное теоретическое содержание

Рассмотрим фигуры, симметричные друг другу относительно некоторой прямой — *оси l*.



а) *б)*

Рис. 5.6

Изобразим на листе бумаги какую-нибудь фигуру (кляксу), а вне ее проведем произвольную прямую l (рис. 5.6 *а*). Не давая краске высохнуть, перегнем лист бумаги по прямой l так, чтобы одна часть листа наложилась на другую. На второй половине листа (полуплоскости) получился отпечаток нашей кляксы (рис. 5.6 *б*). Мы получили фигуру, симметричную данной относительно прямой *l*. Об этих двух фигурах говорят, что *они симметричны друг другу относительно данной прямой — оси l*.

Прямая, относительно которой данные фигуры симметричны, называется *их осью симметрии*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Точки A и A_1 называются симметричными относительно некоторой прямой p, если эта прямая p перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину. Прямая p называется осью симметрии точек A и A_1.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Осевой симметрией с осью l называется такое преобразование, при котором каждая точка данной фигуры переходит в симметричную ей точку относительно оси l.*

Верна теорема:

ТЕОРЕМА. *Осевая симметрия является изометрией.*

Рассматривая различные фигуры, мы замечаем, что некоторые из них *симметричны относительно оси*, т.е. переходят в себя при симметрии относительно этой оси.

Некоторые фигуры имеют несколько осей симметрии. Например, круг симметричен относительно любой прямой, проходящей через его центр. Перегибанием чертежа по диаметру начерченного круга можно убедиться в том, что две части круга совпадают. Поэтому любой диаметр лежит на оси симметрии круга.

Термины и обозначения

Осевая симметрия с осью l обозначается S_l. Запись $S_l(X) = X_1$ читается: «точка X_1 симметрична точке X относительно прямой l» или «точка X при осевой симметрии с осью l перешла в точку X_1».

Задачи

5.35. На рис. 5.7. изображены 3 пары точек, симметричных друг другу относительно оси p.

1) Назовите симметричные точки.

2) Какие расстояния на этом рисунке равны между собой?

3) Какие прямые на этом рисунке взаимно перпендикулярны?

5.36. На рис. 5.8. изображены два симметричных относительно оси l четырехугольника.

1) Какие точки переходят друг в друга при данной осевой симметрии?

2) Какие точки переходят сами в себя?

3) Какие расстояния сохраняются при данной осевой симметрии?

4) В какую фигуру переходит четырехугольник $OABC$?

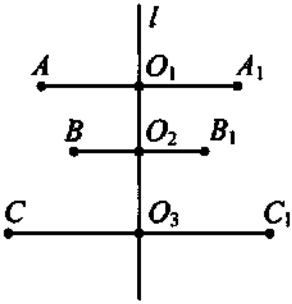


Рис. 5.7

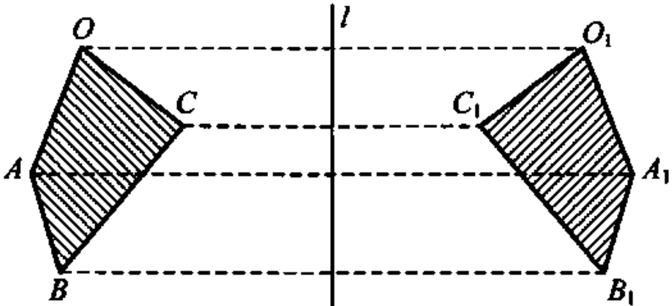


Рис. 5.8

5.37. Имеет ли осевая симметрия неподвижные точки?

5.38. Сколько осей симметрии имеют: а) отрезок; б) луч; в) прямая; г) окружность; г) круг.

5.39. Имеет ли треугольник оси симметрии? Если имеет, то сколько?

5.40. Постройте фигуру, симметричную данному квадрату $ABCD$ относительно данной оси a.

5.41. Пусть даны прямая a и некоторая фигура F. Из каждой точки $X_1 \in F$ проведите перпендикуляр X_1O_1 на прямую a ($O \in a$).На продолжении этого перпендикуляра за прямую a постройте точку X_1', такую, что $X_1X_1' = 2X_1O$. Точкам X_n фигуры F ставятся в соответствие точки X_n', а точкам прямой a — они сами.

1) Сохраняются ли при таком преобразовании величины углов, перпендикулярность прямых?

2) Если фигура F — отрезок, в какую фигуру он переходит?

3) Если фигура F — треугольник, в какую фигуру он не переходит?

4) Есть ли в этом преобразовании неподвижные точки.

5.42. Дан отрезок AB и две точки C и D, такие, что $CA = CB$ и $DA = DB$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой CD.

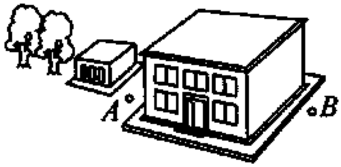


Рис. 5.9

5.43. Измерить расстояние между точками A и B, разделенными зданием (рис. 5.9).

5.44. Сколько осей симметрии на плоскости имеет данный отрезок?

5.45. Симметрия относительно прямой на плоскости является изометрией.

5.46. Прямая, содержащая биссектрису угла, является осью симметрии этого угла.

5.47. Прямая, содержащая биссектрису угла при вершине равнобедренного треугольника, является осью симметрии этого треугольника.

5.48. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является также его медианой и высотой.

5.49. Расстояние от точки до ее проекции на прямую меньше расстояния от этой точки до любой другой точки данной прямой (другими словами, перпендикуляр короче наклонной).

5.50. Если две прямые, лежащие в плоскости, перпендикулярны, то при симметрии относительно одной из них вторая прямая переходит сама в себя.

5.51. Через любую точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой.

5.52. На плоскости задана прямая l. Пользуясь только циркулем, постройте фигуру, в которую при симметрии относительно оси l переходит: а) точка M, не принадлежащая оси l; б) окружность с центром O и радиусом r.

5.53. Во внутренней области прямого угла BOD взята точка X и построены точки X_1 и X_2, симметричные точке X относительно сторон данного угла. Докажите, что точки O, X_1 и X_2 лежат на одной прямой.

5.54. Как проверить, лежат ли три данные точки на одной прямой, пользуясь только циркулем?

5.55. Докажите, что если две точки одной прямой симметричны двум точкам другой прямой относительно некоторой оси, то и все точки первой прямой симметричны точкам второй прямой относительно этой оси.

5.56. Докажите, что если три не лежащие на одной прямой точки плоскости симметричны трем точкам другой плоскости относительно какой-либо оси, то и все точки первой плоскости симметричны точкам второй плоскости относительно этой оси.

5.57. Дана ось симметрии l и точки A и A', симметричные относительно оси l. Построить точку B', симметричную произвольной точке B относительно оси l, пользуясь только линейкой.

5.58. Дана замкнутая ломаная $ABCDA$. Докажите, что при условиях $AB = CD$, $BC = DA$ ломаная обладает осевой симметрией. Выяснить истинность обратного утверждения.

5.59. Прямая MN пересекает отрезок AB. Найдите на прямой MN такую точку X, чтобы прямая MN служила биссектрисой угла AXB.

5.60. Даны две точки A и B и прямая l, разделяющая эти точки. Постройте прямые a и b так, чтобы угол между ними делился прямой l пополам и $A \in a$, $B \in b$.

5.61. Даны две прямые a и b и на одной из них (прямой a) точка A. Постройте на той же прямой такую точку C, чтобы расстояние от нее до прямой b было равно AC.

5.62. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

5.63. Дан острый угол AOB и внутри угла точка M. Найти на сторонах угла такие точки X и Y, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.

5.64. Построить треугольник, зная сторону $AC = b$, прилежащий к ней угол $\angle A = \alpha$ и разность двух других сторон $AB - BC = r$.

5.65. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник с наименьшим периметром.

5.66. Дан треугольник ABC и внутри него точка M. Постройте равнобедренный треугольник с вершиной в точке M, основанием, параллельным прямой AB, и двумя другими вершинами, принадлежащими сторонам AC и BC.

5.67. Построить треугольник ABC наименьшего периметра, если:

а) даны вершины A и B, а третья вершина C должна находиться на данной прямой l;

б) данная вершина A находится внутри данного острого угла, а вершины B и C должны находиться на двух сторонах этого угла.

5.68. На рисунке 5.10 изображен пруд, ширина AB которого равна 10 м. Какую часть (в метрах) отражения в пруду фабричной трубы увидит наблюдатель, находящийся в точке S?

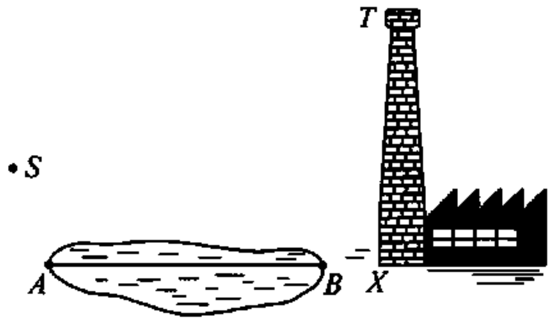


Рис. 5.10

5.69. Лист бумаги имеет лицо и изнанку. На этой бумаге нарисован произвольный треугольник. Как разрезать этот треугольник на наименьшее число частей, чтобы из этих частей можно было бы сложить треугольник, перевернув каждую из частей на прежнем месте изнанкой вверх?

5.70. Из пунктов A и B, расположенных на двух пересекающихся прямых, движутся равномерно с одинаковой скоростью два пешехода. Постройте отрезок, длина которого является кратчайшим расстоянием между движущимися пешеходами. Через сколько времени после начала движения пешеходы будут на кратчайшем расстоянии друг от друга, если $\angle AOB = 90°$, $AO = a$, $BO = b$, а скорость пешеходов равна v?

5.71. (Задача столяра) Столяру принесли 2 одинаковые овальные доски с продолговатым отверстием в центре (рис. 5.11) и заказали из них одну круглую сплошную крышку для стола.

Как распилил столяр принесенные доски?

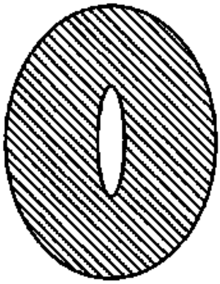


Рис. 5.11

5.72. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Требуется на этой прямой указать точку M, такую, чтобы длина ломаной AMB, была минимальной.

5.73. На плоскости нарисованы три равных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь объединение этих отрезков?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1
СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

1.1. СВОЙСТВА СМЕЖНЫХ УГЛОВ

1.1. $\angle COB$.

1.2. $\angle AOK$ и $\angle KOB$, $\angle AOM$ и $\angle MOB$.

1.3. Нет, так как у смежных углов две стороны должны быть дополнительными лучами.

1.4. Нет. Заштрихованные углы α и β на рис. 1.11 в сумме равны 180°, однако они не являются смежными.

1.5. а) Нет, т.к. оба угла могут быть прямыми.

б) Неверно.

1.6. а) Не могут быть оба острыми; б) не могут быть оба тупыми; в) могут быть оба прямыми.

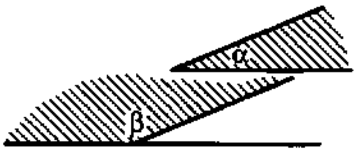


Рис. 1.11

1.7. Смежные с двумя углами углы равны, если равны два данных угла.

1.8. $\angle\beta = 150°$.

1.10. Для угла *AOB* можно построить два смежных с ним угла AOB_1 и BOA_1 (рис. 1.12).

1.11. Для луча *l* можно с помощью построения двух лучей получить смежные углы, как показано на рис. 1.13, *а, б*.

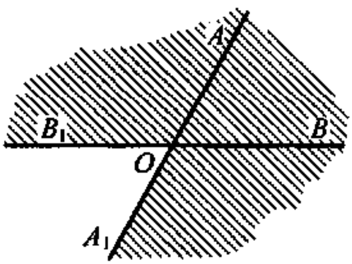
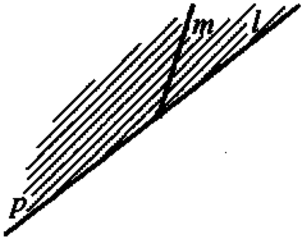


Рис. 1.12



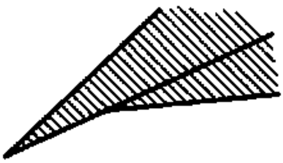
а)

б)

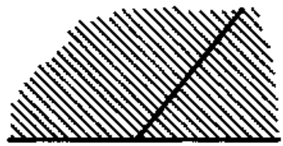
Рис. 1.13

а)

б)



в)



г)

Рис. 1.14

1.12. 150°, 135°, 90°, 164°30′, 97°58′.

1.13. а) Нет (рис. 1.14, *а, б*); б) нет (рис. 1.14, в); в) да (рис. 1.14, *г*).

1.14. а) Пересечением смежных углов является луч. Объединением смежных углов является полуплоскость.

б) Доказательство.

1. $\angle AOC$ и $\angle COB$ — смежные углы (дано) (рис. 1.15).

2. $\angle AOC + \angle COB = 180°$ (требуется доказать).

Из п. 1 можно сделать следующие выводы:

3. Лучи OA и OB — дополнительные (1, определение смежных углов).

4. $\angle AOB$ — развернутый, $\angle AOB = 180°$ (1, 3, свойство развернутого угла).

5. Луч OC проходит между сторонами развернутого угла и отличается от его сторон (1, свойство развернутого угла).

6. $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$ (1, 5, свойство измерения углов).

2. $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$ (4, 6).

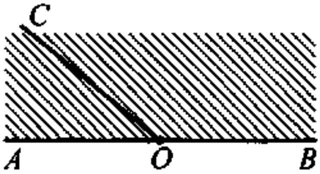


Рис. 1.15

1.15. Решение.

а). 1. $\angle COA$ и $\angle COB$ — смежные. (дано)

2. $\angle COB$ больше $\angle COA$ на 45°. (рис. 1.16 а)

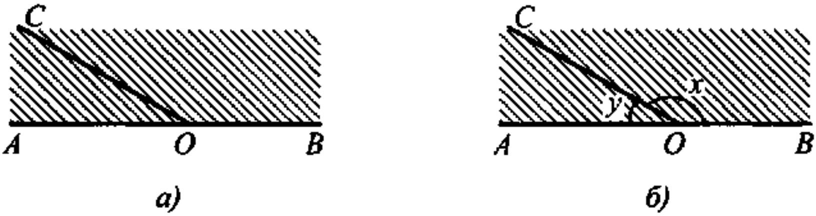


Рис. 1.16

3. Найти углы COA и COB.

4. $\angle COA + \angle COB = 180°$ (1, свойство смежных углов).

5. Обозначим $\angle COB$ через x, а $\angle COA$ через y (обозначения).

6. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ x - y = 45° \end{cases} \quad (1, 2, 4, 5)$$

7. $2x = 225$

$x = 112°30'$, $y = 67°30'$ (6, методы решения систем уравнений)

б). Воспользуемся рисунком 1.16 б. Решение задачи сводится к решению систем:

$$\begin{cases} x - y = 50°, \\ x + y = 180° \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y - x = 50°, \\ x + y = 180°; \end{cases}$$

в). Решение задачи сводится к решению систем:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 5, \\ x + y = 180° \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 5, \\ x + y = 180°; \end{cases}$$

г). 90°.

1.16. а) 72° и 108°; б) 54° и 126°; в) 55° и 125°; г) 88° и 92°.

1.17. 130°.

1.18. а) 90°, б) 90°, в) 90°.

1.19. Решение.

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. } \angle AOC \text{ и } \angle COB \text{ — смежные.}\\ \text{2. } OM \text{ — биссектриса } \angle AOC,\\ \quad OK \text{ — биссектриса } \angle COA.\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{(дано)}\\ \text{(рис. 1.17)}\end{array}$$

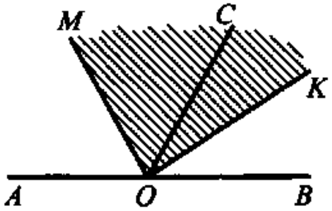


Рис. 1.17

3. Найдите величину угла *MOK*.

Из свойств смежных углов имеем.

4. $\angle AOC + \angle COB = 180°$ (1, свойство смежных углов).

Используя свойства биссектрис углов имеем.

5. $\angle AOM = \angle MOC$, $\angle COK = \angle KOB$ (1, 2 свойства биссектрис углов).

6. $2\angle MOC + 2\angle COK = 180°$ (4, 5)

7. $\angle MOC + \angle COK = 90°$ (6, свойство прямых углов).

1.20. Воспользуйтесь свойствами смежных углов.

1.21. Так как смежные углы равны, а их сумма равна 180°, то каждый из них равен 180° : 2 = 90°, т.е. они прямые.

1.22. При первом складывании мы получаем два развернутых угла. При втором складывании мы получаем четыре прямых угла.

1.23. Углы *COA* и *COB* (рис. 1.18) прямые и имеют общую сторону *OC*, тогда $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = 180°$, т.е. лучи *OA* и *OB* дополнительные.

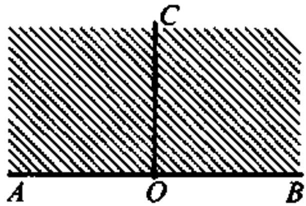


Рис. 1.18

1.24. Решение. 1. Пусть $\angle(ac)$ равен α.

2. Если $\angle(ac) < 90°$, то $\angle(bc) = 90° - \alpha$.

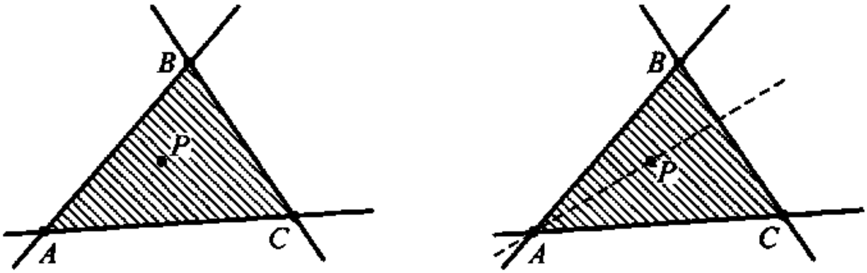
3. Если $\alpha > 90°$, то $\angle(bc) = \alpha - 90°$, что также меньше 90°, так как $\alpha < 180°$ (по условию угол (ac) отложен в полуплоскость, а значит, не является развернутым).

4. В обоих случаях угол (bc) острый.

1.25. Если угол *CAD* будет меньше развернутого, то отрезок *CD* пересекает прямую *AB*, т.е. луч *AB* или дополнительный к нему луч. Рассмотрите эти случаи отдельно.

1.28. Решение.

1. Точки *A*, *B* и *C* не лежат на одной прямой. (дано)
2. Точка *P* не принадлежит прямым *AB*, *BC* и *AC*. (рис. 1.19 а)



а) *б)*

Рис. 1.19

3. Одна из прямых *PA*, *PB* или *PC* пересекает один из отрезков *BC*, *AC* или *AB*.

4. Проведем, например, прямую *PA* (построение) (рис. 1.19 б).

5. Прямая *AP* разбивает плоскость на две полуплоскости. Точка *B* лежит в одной из них.

6. Если точка *C* лежит в другой полуплоскости, то отрезок *BC* пересекает прямую *AP*, что и требовалось доказать.

7. Рассмотрите случай, когда точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AP*. Тогда углы *APB* и *APC* отложены от полупрямой *PA* в одну полуплоскость и угол *BPC* равен их разности.

1.2. СВОЙСТВА ВЕРТИКАЛЬНЫХ УГЛОВ

1.29. При пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов, которые равны между собой.

1.30. Две пары вертикальных углов и четыре пары смежных.

1.31. Шесть углов.

1.32. Могут. Вертикальные. Две пары вертикальных углов.

1.33. а, б) Могут; в) не могут.

1.34. Нет.

1.35. а) Острыми; б) тупыми; в) прямыми.

1.37. Например, через противоположные вершины граней.

1.38. 30°, 150°, 30°, 150°.

1.40. а) Доказательство.

На рис. 1.20, *а*) изображены две пары вертикальных углов. Докажем, например, что $\angle 1 = \angle 3$.

1. $\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные (дано) (рис. 1.20, *а*).

2. $\angle 1 = \angle 3$ (требуется доказать).

Из п. 1 можно получить такие следствия:

3. Лучи OA и OA_1, OB и OB_1 — дополнительные (1, определение вертикальных углов).

4. $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 2$ и $\angle 3$ — смежные углы (3, определение смежных углов).

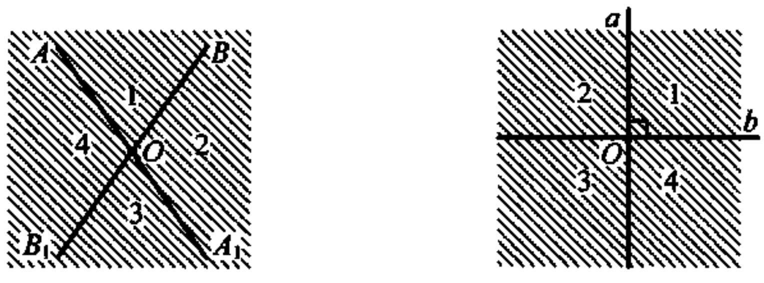
5. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (4, свойство смежных углов).

Для доказательства п. а) нам достаточно воспользоваться равенствами в п. 5 доказательства.

6. $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$ (5).

В равенство 6 входит один и тот же угол: $\angle 2$. Вычтем его из обеих частей равенства:

7(2). $\angle 1 = \angle 3$ (6).



а) *б)*

Рис. 1.20

б) Решение.

1. Две прямые a и b пересекаются в точке O. (дано)

2. Один из углов, например $\angle 1$ равен 90°. (рис. 1.20)

3. Докажите, что все остальные углы равны 90°.

4. Углы 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 1 и 4 смежные (1, определение смежных углов).

5. Углы 1 и 3, 2 и 4 вертикальные (1, определение вертикальных углов).

6. Углы 1, 2, 3 и 4 равны каждый по 90° (1, 2, 4, 5).

1.41. 60°.

1.42. Неверно.

1.44. 110°, 70°, 110°, 70°.

1.45. Решение а).

1. Прямые a и b пересекаются в точке O.

2. При пересечении прямых образовались четыре угла 1, 2, 3, 4. (дано) (рис. 1.21)

3. $\angle 2$ на 20° больше угла 1.

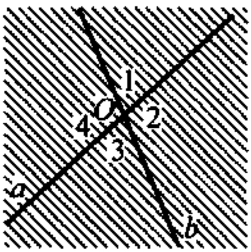


Рис. 1.21

4. Найдите величины каждого из углов.

5. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (1, 2, свойства смежных углов).

6. $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 2$ (1, 2, свойства вертикальных углов).

7. $\angle 2 - \angle 1 = 20°$ (3, свойство измерения углов).

8. Сложим равенства в п. 5 и п. 7 $2\angle 2 = 200°$, $\angle 2 = 100°$.

9(4). $\angle 1 = 80°$, $\angle 2 = 100°$, $\angle 3 = 80°$, $\angle 4 = 100°$ (2, 6, 8).

1.46. 65°, 115°.

1.47. 36°, 144°.

1.48. Если сумма трех углов равна 270°, то четвертый угол равен 90°.

1.49. Углы (a_1b) и (ab_1) вертикальные.

1.50. 180°.

1.51. $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COE = 110°$, $\angle COD = 60°$.

1.52. Решение.

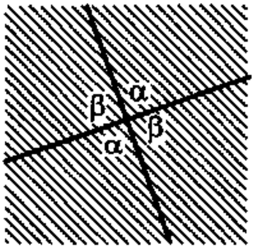


Рис. 1.22

1. Даны две пересекающиеся прямые.
2. $\dfrac{\alpha+\alpha}{2} = \beta$

(дано) (рис. 1.22)

3. Найдите эти углы.
4. $\alpha + \beta = 180°$ (1, свойства смежных углов).
5. $2\beta = 180°$, $\beta = 90°$ (2, 4).
6. $\alpha = 90°$ (2, 5).

1.53. При решении этой задачи мы руководствуемся тем, что сумма смежных углов равна 180° и вертикальные углы равны. Пока мы не можем воспользоваться теоремой о сумме углов треугольника (она появится позже).

1.54. Если углы α и β равны, то лучи b_1 и b_2 являются дополнительными (рис. 1.23).

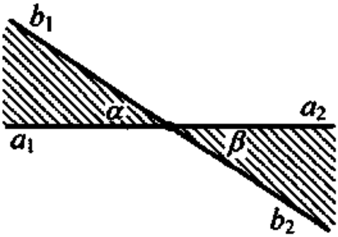
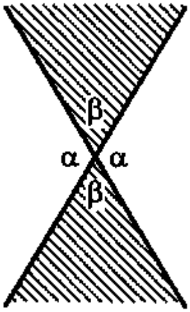


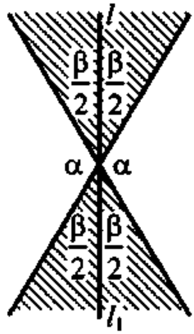
Рис. 1.23

1.55. Решение.

1. Даны две пары равных вертикальных углов α и β (рис. 1.24 а).
2. l и l_1 — биссектриса двух вертикальных углов α (рис. 1.24 б).



а)



б)

Рис. 1.24

3. Докажите, что l и l_1 лежат на одной прямой.

Как доказать, что l и l_1 лежат на одной прямой? Это будет тогда, когда $\angle(l\,l_1) = 180°$.

4. $\alpha + \beta = 180°$ (1, свойство вертикальных углов).

5. $\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \alpha = \beta + \alpha = 180°$, а значит $\angle(l\,l_1) = 180°$ (2, 4, свойства измерения углов).

Глава 2
РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

2.1. ПОНЯТИЯ «РАВЕНСТВА ФИГУР» И «РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ»

2.1. 1. Между сторонами BC и AB лежит угол ABC.

2. К углам A и B прилегает сторона AB.

3. $\angle C$ расположен между сторонами BC и AC.

4. Сторона BC прилегает к углам B и C.

2.2. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $CB = C_1B_1$.

2.3. а) Два отрезка равны, если равны их длины. Два отрезка равны, если при наложении они совпадают.

б) Равенство двух углов определяется аналогично.

2.4. а) Два отрезка равны, если равны их длины или если при совмещении они совпадают.

б) Все прямые равны между собой.

г) Две окружности равны, если равны их радиусы.

д) Два квадрата равны, если равны их стороны.

е) Два треугольника равны, если при наложении они совпадают.

Приведенные формулировки сделаны из чисто наглядных соображений.

2.5. Если у нас дан ΔMHK, то из этого следует, что сторона MK лежат против угла H, сторона MH лежит против угла K, сторона HK лежит против угла M.

2.6. Воспользуйтесь «неравенством треугольника»: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

2.7. Можно наложить один треугольник на другой и выяснить, совпадают они или нет. Позднее для этой цели появятся признаки равенства треугольников.

2.8. 1) Верно; 2), 3) неверно; 4) в правильной пирамиде существует грань, являющаяся остроугольным треугольником, — это основание пирамиды, по определению это правильный треугольник, а остальные грани могут быть как остроугольными, так и тупоугольными треугольниками.

2.9. 1. Да. 2. Да. 3. Все стороны равны. 4. Противоположные стороны равны. 5. Равны. 6. Да равны. 7. Да равны.

2.10. Можно вырезать фигуры и наложить их друг на друга. Явно не равны фигуры, изображенные на рис. 2.3 *ж*).

В случае з) вырезать и наложить друг на друга фигуры не возможно.

2.11. Равны, например, фигуры на рис. 2.4 *а*) и на рис. 2.4 *ж*), на рис. 2.4 *д*) и на рис. 2.4 *з*).

2.12. 1) $A_1B_1 = 5$ см, $\angle A_1 = 90°$.

2) $A_1B_1 = 2$ см, $B_1C_1 = 4$ см, $C_1A_1 = 8$ см.

3) $\angle A_1 = 34°$, $\angle B_1 = 36°$.

4) $\angle A = 76°$, $AB = 10$ см, $CA = 5$ см.

2.13. Если $\Delta ABE = \Delta DCF$, то $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, $\angle E = \angle F$, $AB = DC$, $BE = CF$, $AE = DF$.

2.14. Фигуры на рис. 2.6 *а*) и на рис. 2.6 *д*); на рис. 2.6 *в*) и на рис. 2.6 *г*); на рис. 2.6 *б*) и на рис. 2.6 *е*).

2.15. Рис. а) и е); б) и г); в) и д).

2.17. $OB = 4$ см; $BC = 8$ см; $OC = 10$ см.

2.18. Мы уже говорили о том, что треугольники должны совпадать при наложении одного на другой. Можно предполагать, что треугольники равны, если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого, но это нужно доказать.

2.20. Можно построить треугольник, если каждая из сторон меньше суммы двух других.

2.21. Решение. 1. $AB = BC$, $AD = DC$ (дано) (рис. 2.10).

2. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CBD$. Нам нужно воспользоваться одним из признаков равенства треугольников. Посмотрев на рис. 2.10, мы видим, что у ΔABD и у ΔCDB сторона DB — общая.

3. Мы видим, что три стороны ΔABD равны трем сторонам ΔBDC, и значит они равны по соответствуюшему признаку.

2.22. В этой задаче первый этап построения повторяет предыдущую задачу. На втором этапе мы пользуемся свойствами равных треугольников и получаем, что $\angle ABD = \angle CBD$.

Решение. 1. $AB = BC$, $AD = CD$ (дано) (рис. 2.12).

2. BD — общая сторона.

3. $\Delta BAD = \Delta BCD$ (1, признак равенства треугольников по трем сторонам).

4. $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB$ (3, свойства равных треугольников).

5.(2) BD — биссектрисы углов ABC и BDC (4, определение биссектрисы угла).

2.23. На рисунке 2.27 три угла ΔBMN равны трем углам ΔABC. Мы ясно видим, что эти треугольники не являются равными.

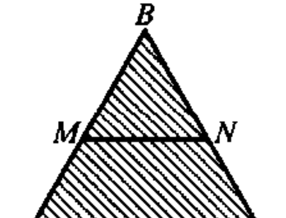


Рис. 2.27

2.24. Решение. 1. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2. На сторонах AB и A_1B_1 отложены точки P и P_1 такие, что $AP = A_1P_1$ } (дано) (рис. 2.28).

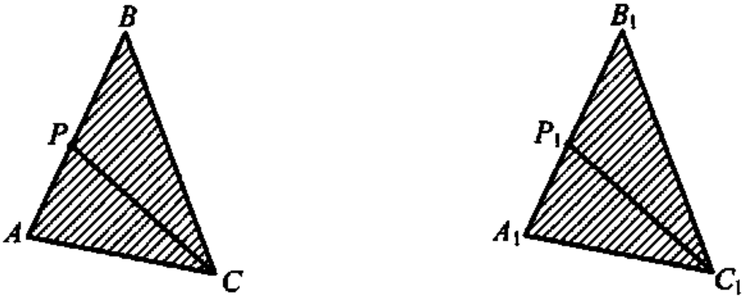


Рис. 2.28

3. Докажите, что $\Delta APC = \Delta A_1P_1C_1$.

Рассмотрим ΔAPC и $\Delta A_1P_1C_1$.

4. $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AP = A_1P_1$ (1, 2, свойства равных треугольников).

5(3). $\Delta APC = \Delta A_1P_1C_1$ (4, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

2.25. Треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

2.27. Решение.

1. Отрезки AD и BC пересекаются в точке E, $BE = EC$, $AE = ED$ (дано) (рис. 2.14).

2. $\Delta ABE = \Delta DCE$ (требуется доказать).

3. $\angle AEB = \angle CED$ (1, свойство вертикальных углов).

4. $\Delta ABE = \Delta CED$ (1, 3 признаки равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

2.28. Можно доказать равенство треугольников MBK и NBK.

2.29. Из данных задачи можно доказать, например, что $AB = CD$.

2.31. Решение. 1. Отрезки AB и A_1B_1 пересекаются в точке C, $BC = CA$ $\angle A = \angle B$ (дано) (рис. 2.18).

2. Докажите, что $\Delta CBB_1 = \Delta CAA_1$.

3. Нужно воспользоваться одним из признаков равенства треугольников. У нас есть по равной стороне и по одному прилежащему углу.

4. $\angle A_1CA = \angle B_1CB$ (1, свойство вертикальных углов).

5. $\Delta CBB_1 = \Delta CAA_1$ (1, 4, признаки равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам).

2.32. Треугольники равны по стороне и прилежащим к ней двум углам.

2.33. Можно доказать равенство пар треугольников: ΔABE и ΔACE, ΔBDE и ΔCDE.

2.34. 1. Так как $\Delta OAB = \Delta OCB$, то AB = BC, $\angle OBA = \angle OBC$.

2. $\Delta APB = \Delta CPB$ (по признаку равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

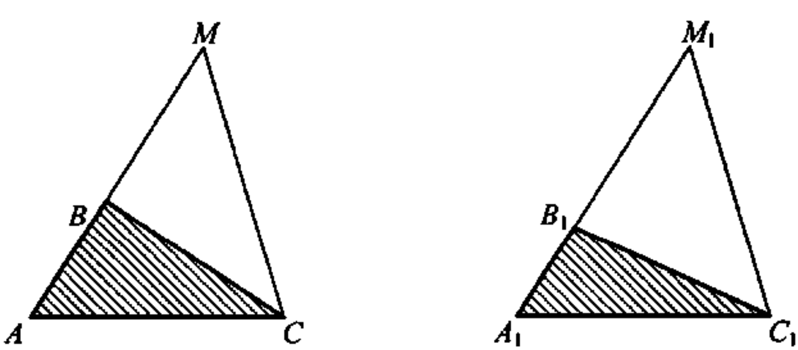
2.35. Следует помнить, что прямые можно проводить через одну точку или через две точки.

1. Существуют различные способы построения треугольника равного данному.

2. При построении второго треугольника мы используем три элемента треугольника.

3. Необходимо рассматривать элементы треугольников по три попарно, но могут быть частные случаи: для построения равностороннего треугольника нужна только одна его сторона.

а)



б)

Рис. 2.29

2.36. Решение. 1. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $A = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$ (дано) (рис. 2.29 *а*).

2. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

3. На продолжении сторон AB и A_1B_1 данных треугольников отложим $BM = BC$ и $B_1M_1 = B_1C_1$ и соединим точки M и C, M_1 и C_1 (построение) (рис. 2.29 б).

4. Получили два треугольника AMC и $A_1M_1C_1$.

5. $\Delta AMC = \Delta A_1M_1C_1$ (1, 3, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

6. $\Delta BMC = \Delta B_1M_1C_1$ (1, 3, признак равенства треугольников по трем сторонам).

7. Из п. 5 и п. 6 получим, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2.37. Смотрите решение предыдущей задачи.

2.38. а) ΔAOA_1 и ΔBOB_1 равны по признаку равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними, следовательно $AA_1 = BB_1$.

б) Чтобы доказать, что точки P и P_1 лежат на одной прямой с точкой O нужно доказать, что угол POP_1 — развернутый.

2.39. 1. Если $\Delta ABC = \Delta BAC$, то $AB = BA$, $AC = BC$, $BC = AC$.

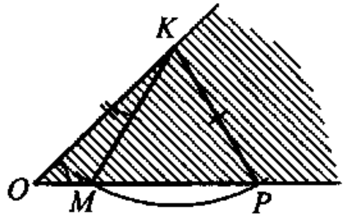
2. Если $\Delta ABC = \Delta ACB$, то $AB = AC$, $AC = AB$, $BC = CB$.

3. Отсюда следует, что $BC = AC = AB$, а значит ΔABC — равносторонний.

2.40. $\Delta ABC = \Delta GNK$. Это свойство транзитивности равенства треугольников: если один треугольник равен другому, а другой третьему, то первый и третий треугольники равны.

2.41. Мы имеем два треугольника ABO и CBO, у которых три стороны одного равны трем сторонам другого. По соответствующему признаку равенства треугольников эти треугольники равны.

а)



б)

Рис. 2.30

2.42. Внешне эта задача похожа на рассмотренные выше признаки равенства треугольников, но здесь ситуация несколько отличается.

Замечание. Следует объяснить учащимся общее рассуждение: если по заданным элементам строится единственная фигура (треугольник, четырехугольник и т.д.), то справедливы соответствующие признаки равенства. В данном случае речь идет о построении треугольника по двум сторонам и углу не расположенному между ними.

Решение. 1. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (рис. 2.30 а).

2. Равны ли эти треугольники?

3. Возьмем на плоскости угол с вершиной в точке O, равный углу ABC (или $A_1B_1C_1$), и отложим на одной из его сторон отрезок OK, равный AB (или A_1B_1), и с центром в точке K построим окружность радиусом AC (или A_1C_1) (рис. 2.30 б).

4. Окружность может пересечь сторону угла в двух точках.

5. Обозначим указанные точки пересечения через P и M (рис. 2.30 б).

6. Получим два треугольника OKP и OKM, углы которых с вершинами P и M дополняют друг друга до 180°. (Это следует из того, что треугольник KPM равнобедренный.)

7. Получаем доказательство утверждения задачи, поскольку каждый из данных треугольников должен быть равен одному из треугольников — OKP или OKM.

Замечание. Очень полезно понять, когда имеет место единственность треугольника и справедлив соответствующий признак равенства треугольников. Для этого нужно, чтобы соответствующая окружность имела со второй стороной угла общую точку. Возможен еще случай, когда эта окружность касается противоположной стороны угла. Это будет иметь место, если ее радиус не меньше OK, равного AB. В частности, так будет всегда, если равные углы (ABC и A_1B_1C) не являются острыми.

2.43. Решение. Чтобы установить, что $AB = DK$, надо доказать равенство тех треугольников, в которых отрезки AB и DK являются соответствующими сторонами. Это треугольники ACB и KCD (рис. 2.22).

1. $AC = CK$ и $DC = CB$, так как точка C — середина отрезков AK и DB; $\angle ACB = \angle DCK$ как вертикальные.

2. $\Delta KCD = \Delta ACB$ по двум сторонам и углу между ними.

3. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны; $\angle ACB = \angle DCK$, значит, равны и лежащие против них стороны AB и DK.

4. Если $DK = 500$ м, то и $AB = 500$ м. Значит вывод сделан верно.

2.44. Решение. В треугольниках ABC и FDC $BC = CD$, так как C — середина отрезка BD (рис. 2.25). $\angle BCA = \angle DCF$ как вертикальные, $\angle D = \angle B$ по построению.

2. $\Delta FDC = \Delta ABC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

3. В равных треугольниках соответствующие элементы равны. Значит, $DF = AB$, так как они лежат против равных углов BCA и DCF.

4. Для нахождения расстояния AB достаточно измерить расстояние DF.

2.47. 1) Эта задача довольно простая. Нужно рассмотреть два равных треугольника AEB и CDB (рис. 2.26).

2) Решение. 1. $AE = DC$, $DA = EC$ (дано) (рис. 2.26).

2. $\angle 1 = \angle 2$ (требуется доказать).

3. Рассмотрим ΔAMD и ΔCME.

4. $\angle AMD = \angle CME$ (рис. 2.26) (1, свойство вертикальных углов).

5. $\Delta ADM = \Delta CEM$ (1, 4 задача 1).

6. $\angle 1 = \angle 2$ (5 свойство равенства треугольников).

2.48. 1. Если $\Delta ABC = \Delta DEM$, то $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle M$, $AB = DE$, $BC = EM$, $AC = DM$.

2. 1. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, BM и B_1M_1 медианы этих треугольников (дано) (рис. 2.31).

2. $BM = B_1M_1$ (требуется доказать).

Рис. 2.31

3. $AM = A_1M_1$ (1, свойства медиан треугольника).

4. Для доказательства п. 2 нужно доказать равенство ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$.

5. $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по двум сторонам и углу между ними.

6. $BM = B_1M_1$ (4, свойство равных треугольников).

Глава 3
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

3.1. ПОНЯТИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА И НАКЛОННОЙ К ПРЯМОЙ

3.1. 1) Углы *MOD* и *CON* — вертикальные. Углы *MOC* и *DON* — вертикальные.

2) $\angle MOD$ и $\angle MOC$, $\angle MOC$ и $\angle CON$, $\angle CON$ и $\angle NOD$, $\angle NOD$ и $\angle DOM$ — смежные углы.

3) На рисунке 3.5 есть четыре равных между собой угла по 90° каждый.

3.2. *AB* — перпендикуляр к прямой *DC*, *AD* и *AC* — наклонные к прямой *DC*.

Прямая *AB* образует с прямой *DC* прямые углы, а прямые *AD* и *AC* не являются прямыми, перпендикулярными прямой *DC*.

3.3. В каждой вершине куба пересекаются три взаимно перпендикулярные прямые.

3.4. Если аккуратно выполнить рисунок, то можно сделать вывод о том, что биссектрисы треугольника будут пересекаться в одной точке. Позднее эта теорема будет доказана.

3.5. $AM = CM$, $BD = CD$.

3.6. Треугольник имеет три высоты. Высоты треугольника перпендикулярны к сторонам, к которым они проведены и пересекаются в одной точке.

3.7. Надо знать, что угол между ними прямой.

3.8. 1. Меньшую длину имеет отрезок *BA*.

2. Три пары смежных углов.

3. $\angle BAC$ и $\angle BAD$ — прямые.

4. На рисунке 3.9 имеется три треугольника.

3.9. На плоскости одну. В пространстве бесконечное множество.

3.10. Только одну.

3.11. Не могут.

3.12. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта теорема будет позднее доказана.

3.13. Может.

3.14. а) Могут; б) Не могут.

3.15. Не может.

3.16. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Построение высот при помощи чертежного угольника не вызывает труда.

3.17. Да, пересекутся.

3.19. Решение. 1. $a \perp b$. O — точка пересечения прямых a и b, прямая c проходит через точку O.
2. $\angle 1 = 50°$ } (дано) (рис. 3.10)

3. Найдите углы 2, 3 и 4.

4. $\angle 3 = 50°$ (1, свойства вертикальных углов)

5. $\angle 2 = 90° - 50° = 40°$ (1, 2, свойство измерения углов).

6. $\angle 4 = 180° - 50° = 130°$ (1, 4, 5, свойство смежных углов).

3.20. Решение. Лучи OA, OB, OC, $OB \perp OA$, угол между биссектрисами углов AOB и BOB равен 75° (дано) (рис. 3.11).

2. Найдите углы AOB, BOC, AOC.

3. $\angle AOB = 90°$ (1, свойства прямого угла).

4. $\angle MOA = \angle BOM = 45°$ (1, определение биссектрисы угла).

5. $\angle BON = \angle NOC$ (1 определение биссектрисы угла).

6. $\angle BON = 75° - 45° = 30°$ (3, 4, свойства измерения углов).

7. $\angle BOC = 60°$ (3, 4 свойства измерения углов).

8. $\angle AOC = 150°$ (6, 7, свойства измерения углов).

3.21. Ответ. 45°, 135°.

3.22. Решение. $\angle AOB = \angle AOC$ (дано) (рис. 3.24).

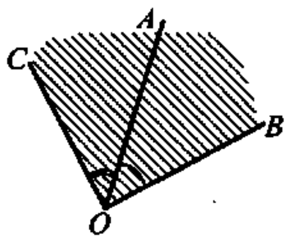
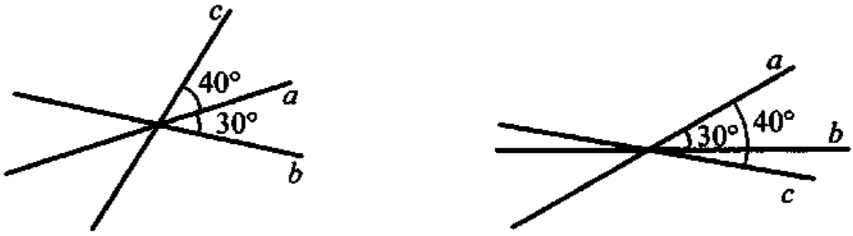


Рис. 3.24

2. Перпендикулярны ли прямые OB и OC?

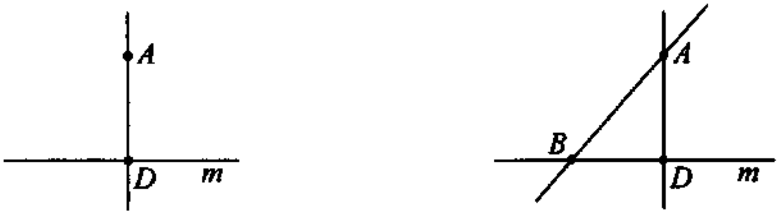
3. Прямые OB и OC будут перпендикулярны, если $\angle AOB = \angle AOC = 45°$.

3.23. При решении этой задачи важно рассмотреть два случая расположения прямых (рис. 3.25 а, б).

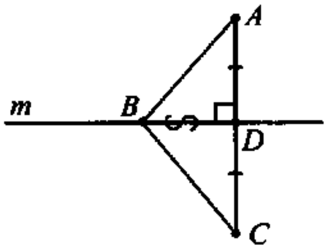


а) *б)*

Рис. 3.25



а) *б)*



в)

Рис. 3.26

3.24. Ответ. 135°.

3.25. Доказательство. а) Докажем сначала единственность построения перпендикуляра.

1. $A \notin m$, $AD \perp m$, $D \in m$ (дано) (рис. 3.26 а).

2. AD — единственный перпендикуляр (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

3. Предположим, что через точку A можно провести к прямой m еще один перпендикуляр, например, AB, то есть $AB \perp m$ (рис. 3.26 б).

4. Построим луч DC, противоположный лучу DA, и, отложив на нем $DC = DA$, проведем отрезок CB, тогда получим ΔABD и ΔCBD (построение) (рис. 3.26 в).

5. В этих треугольниках BD — общая сторона $AD = DC$ по построению, $\angle ADB = \angle BDC = 90°$, значит $\Delta ABD = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними.

6. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABD = \angle DBC$.

7. По предположению $AB \perp m$, тогда угол ABD прямой, а значит ему равный угол DBC также прямой.

8. Получили, что угол ABC развернутый, то есть лучи BA и BC составляют прямую. В таком случае через две точки A и C проходят две различные прямые, что противоречите аксиоме прямой.

9. Предположение о том, что из точки A к прямой m можно провести два перпендикуляра, неверно, а верно то, что из точки A к прямой m можно провести только одни перпендикуляр. Следовательно, AD — перпендикуляр к прямой m, а AB — наклонная к ней (рис. 3.26 б).

б) 1. AD — перпендикуляр к прямой m, а AB — наклонная (дано) (рис. 3.26 б).

2. Теперь докажем, что $AD < AB$.

3. Так как точки A, B и C не лежат на одной прямой, то по теореме о неравенстве треугольника $AC < AB + BC$.

4. D — внутренняя точка отрезка AC, поэтому $AC = AD + DC$, а так как $\Delta ABD = \Delta CBD$, то $AC = 2AD$, а $AB + BC = 2AB$.

5. Заменим в неравенстве треугольника левую и правую части равными им выражениями, получим: $2AD < 2AB$.

6(2). $AD < AB$.

3.26.

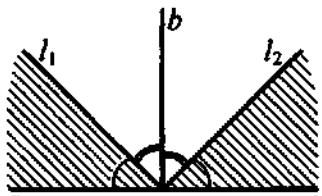


Рис. 3.27

На рис. 3.27 мы видим две пары равных углов. В результате мы имеем два угла $\angle(ab)$ и $\angle(cb)$. Эти углы равны и являются смежными. Значит луч b перпендикулярен сторонам развернутого угла.

3.27.

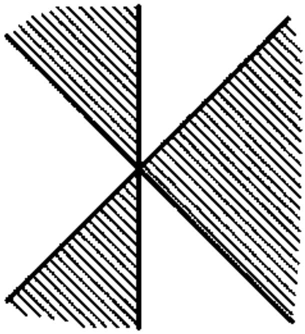


Рис. 3.28

На рисунке 3.28 мы видим три заштрихованных угла. Если рассмотреть один заштрихованный угол и два незаштрихованных угла, равных двум другим заштрихованным углам, то получается развернутый угол.

3.28.

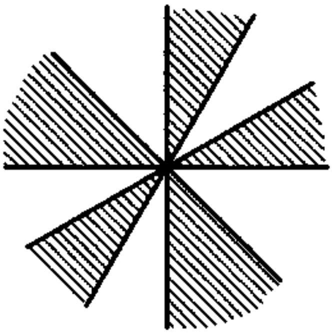


Рис. 3.29

Смотрите указания к решению предыдущей задачи (рис. 3.29).

3.2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

3.29. На рисунке 3.13 размеры сторон и углов треугольников не указаны. Вместе с тем ясно, что мы имеем, например, три прямоугольных треугольника, один тупоугольный, три остроугольных треугольника.

3.30. Прямые AB и BC — перпендикулярные прямые, прямая AC — наклонная к прямой BC. Отрезок AB короче отрезка AC. Отрезки AB и BC — катеты ΔABC, AC — гипотенуза ΔABC (рис. 3.14).

3.31. $\angle 1$ и $\angle 2$ прямые. На рисунке 3.15 имеется два прямоугольных треугольника AMC и BMC.

3.32. Однозначно определяют прямоугольный треугольник: а) три его стороны; б) катет и гипотенуза; в) два катета; г) гипотенуза и острый угол. Обосновать наши выводы пока можно, опираясь на признаки равенства треугольников. Позднее после доказательства теоремы о сумме углов треугольника и теоремы Пифагора можно будет уже полностью обосновать наши выводы.

3.33. На рисунке 3.30 изображен прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и BC (дано).

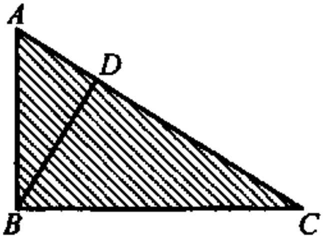


Рис. 3.30

2. $AB \perp BC$, $BC \perp AB$ (1, признаки определения треугольника).

4. AB и BC — высоты ΔABC (1, 2, определение высоты треугольника).

5. $BD \perp AC$, BD —высота ΔABC (рис. 3.30).

У высот AB, BC, BD общая точка B — вершина прямого угла.

3.37. В данном случае можно применить признаки равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам.

3.38. Треугольники равны по признаку равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников следует, что в них соответственные углы и стороны равны.

3.39. Этот важный и полезный факт можно доказывать разными способами. Вероятно, наиболее простой способ из известных (в том смысле, что он опирается на свойство прямоугольника, известное уже в начальной школе) состоит в следующем:

1. Рассмотрим прямоугольник со сторонами, равными катетам данного треугольника.

2. Диагонали прямоугольника равны.

3. Рассматриваемая медиана равна половине одной диагонали, а гипотенуза равна другой диагонали.

4. Следует вспомнить, что в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности находится в середине гипотенузы и указанная медиана равна радиусу описанной окружности.

Верно также и обратное утверждение.

Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник является прямоугольным (прямым является угол, противолежащий соответствующей стороне).

Замечание. Однако из равенства медианы и радиуса описанной окружности не следует, что треугольник прямоугольный. (Нужный пример можно построить следующим образом.

— Проведем в окружности с центром O хорду AB.

— Пусть M — середина AB.

— Обозначим через C одну из точек пересечения серединного перпендикуляра к OM с данной окружностью.

Треугольник ABC не является прямоугольным, но медиана к стороне AB равна радиусу описанной окружности.)

3.40. Решение. а) 1. Даны два катета прямоугольного треугольника a и b (дано) (рис. 3.31 а).

2. Постройте прямоугольный треугольник по этим двум катетам.

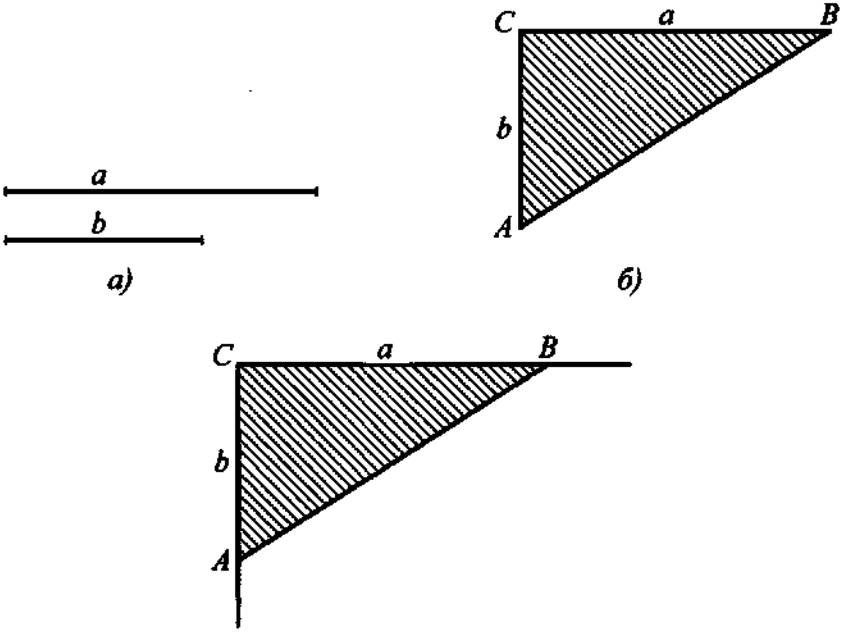
3. Предположим, что задача решена и ΔABC построен (рис. 3.31 б).

Используя рисунок 3.31 б, можно выполнить следующие построения.

4. С помощью чертежного треугольника построим прямой угол C и на его сторонах от вершины C отложим отрезки $CB = a$ и $CA = b$ (рис. 3.31 в).

5. Соединив точки A и B отрезком, получим искомый треугольник ABC (рис. 3.31 в).

Эта задача имеет одно решение, так как все другие прямоугольные треугольники, построенные по этим же катетам a и b, будут равны треугольнику ABC по первому признаку равенства треугольников.



а) *б)* *в)*

Рис. 3.31

б) 1. Нам даны катет и гипотенуза прямоугольного треугольника (дано) (рис. 3.32 а).

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

3. Предположим, что задача решена и ΔABC построен (рис. 3.32 б).

Изучая рисунок 3.32 б выполним следующие построения.

4. При помощи угольника постройте прямой угол C (рис. 3.32 в).

5. На одной его стороне отложите отрезок CA длиной a. Точки A и C — две вершины треугольника, который мы строим (рис. 3.32 в).

6. Третья вершина B должна лежать на другой стороне угла на расстоянии b от вершины A.

7. Раствором циркуля, равным b, из точки A как из центра сделайте засечку на другой стороне угла (рис. 3.32 в).

8. Получим точку B (рис. 3.32 в).

9. ΔABC искомый (рис. 3.32 в).

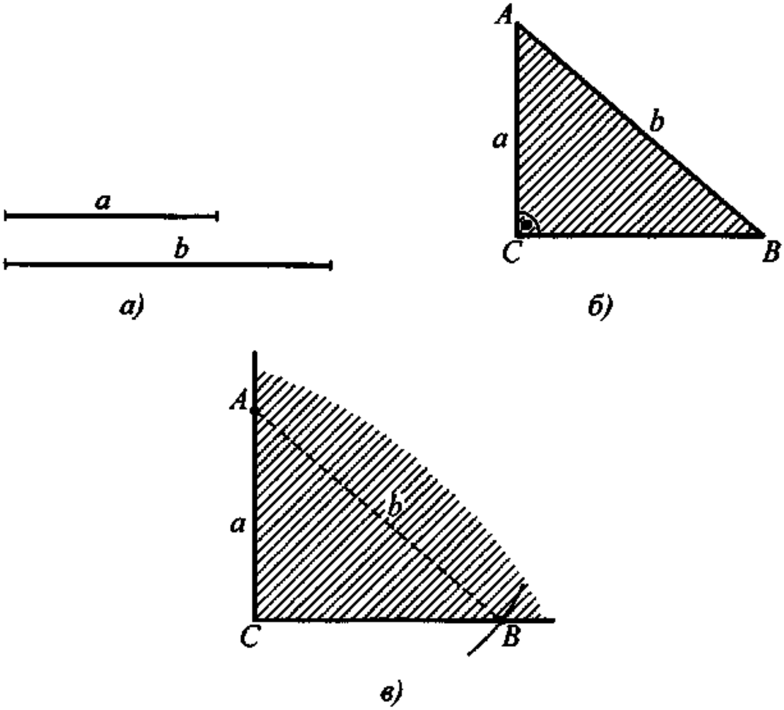


Рис. 3.32

3.41. Решение. 1. Нам дана сумма двух катетов прямоугольного треугольника ABC $a + b$ и гипотенуза c (дано) (рис. 3.33 а).

2. Постройте прямоугольный треугольник по сумме катетов $a + b$ и гипотенузе c.

3. Предположим, что задача решена и прямоугольный треугольник ABC построен (рис. 3.33 б).

Глядя на рисунок 3.33 б можно выполнить следующие построения.

4. Из конца M отрезка $BM = a + b$ проводим луч MP под углом 45° к отрезку MB (рис. 3.33 а).

5. Из точки B, как из центра, радиусом $R = c$ проводим дугу до ее пересечения с лучом MP и из полученных точек A и A_1 опускаем перпендикуляры AC и A_1C_1 на прямую MB (рис. 3.33 в).

6. Треугольники ABC и A_1BC_1 — искомые ($BC = A_1C_1$, $AC = BC_1$ и $BC_1 + A_1C_1 = BC + AC$) (рис. 3.33 в).

7. В случае двух точек пересечения дуги с лучом AP задана имеет два решения. В случае касания дуги с лучом AP — одно решение.

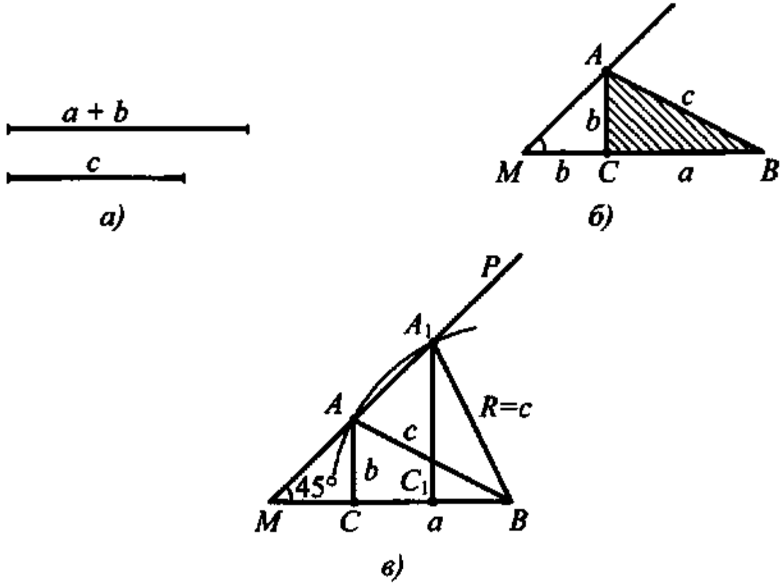


Рис. 3.33

Замечание. Эта задача является довольно сложной задачей на построение, но знаний, которые имеются у учащихся к данному моменту, достаточно для ее решения.

3.42. Решение. 1. Нам даны катет $BC = a$ и сумма другого катета b и гипотенузы c прямоугольного треугольника (рис. 3.34).

2. Построить прямоугольный треугольник по катету a и сумме другого катета и гипотенузы — $b + c$.

3. Предположим, что задача решена и ΔABC построен (рис. 3.35).

Глядя на рисунок 3.35 выполним следующее построение.

4. Построим прямой угол с вершиной в точке C и на его сторонах отложим отрезки $CD = b + c$ и $CB = a$ (рис. 3.35).

5. Через середину N отрезка BD проводим перпендикуляр до пересечения его с прямой DC в точке A. Соединяем точки A и B (рис. 3.35).

6. Треугольник ABC — искомый ($AD = AB$ как стороны равнобедренного треугольника ABD).

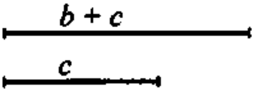


Рис. 3.34

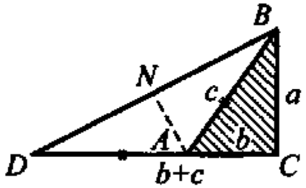


Рис. 3.35

Замечание. Это хорошая задача на построение прямоугольного треугольника, но для ее решения нужно знать свойства серединного перпендикуляра к отрезку. Конечно эту задачу можно решить позднее, но мы решили оставить ее здесь.

3.3. СВОЙСТВА ВЫСОТ, МЕДИАН И БИССЕКТРИС РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

3.43. $\angle B = 60°$.

3.44. В любом разностороннем треугольнике высота не совпадает с биссектрисой и медианой, проведенной из одной вершины.

3.45. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная из вершины треугольника, совпадает с медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

3.47. Решение. 1. В равнобедренном треугольнике с вершиной B $\angle BCM = 114°$ (дано). (рис. 3.36).

2. Найдите углы A и BCA.

3. $\angle BCA = 180° - 114° = 66°$ (1, свойство смежных углов).

4. $\angle A = \angle BCA$ (1, свойство равнобедренного треугольника).

5(2). $\angle A = 66°$, $\angle BCA = 66°$ (1, 3, 4).

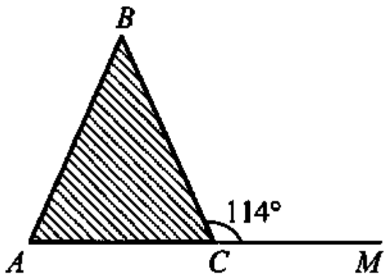


Рис. 3.36

3.48. Решение.

$\left.\begin{array}{l}\text{1. Треугольник } ABC \text{ с основанием} \\ AC \text{ — равнобедренный.} \\ \text{2. Угол вертикальный с углом } B \text{ равен } 140°.\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{(дано)} \\ \text{(рис. 3.37)}\end{array}$

3. Найдите углы между боковой стороной и высотой, проведенной к основанию.

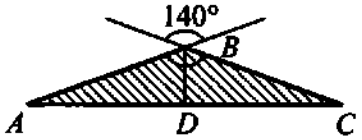


Рис. 3.37

4. $\angle ABC = 140°$ (1, 2, свойство вертикальных углов).

5. BD — биссектриса угла B треугольника ABC (1 свойство высоты равнобедренного треугольника).

6(2). $\angle ABD = 70°$ (5, определение биссектрисы угла).

3.49. Решение.

1. В равнобедренном треугольнике ABC BD — медиана $\angle KBC = 82°$. (дано)

2. Найдите угол CBD. (рис. 3.38)

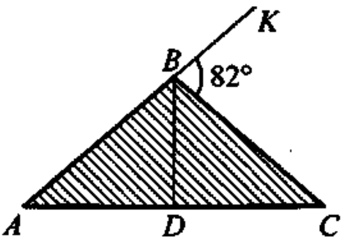


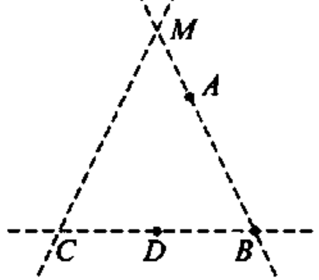
Рис. 3.38

3. $\angle ABC = 98°$ (1, свойство смежных углов).

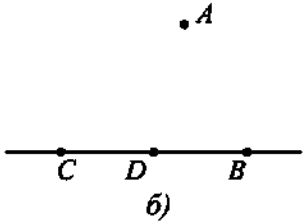
4. BD — биссектриса $\angle B$ (1, свойство биссектрис, медиан и высот равнобедренного треугольника).

5(2). $\angle CBD = 49°$ (1, 3, 4).

3.51. Решение. 1. В равнобедренном треугольнике CMB, который нужно восстановить, мы имеем точку A на боковой стороне MB, вершину B и точку D — середину основания CB (рис. 3.39 а).



а)



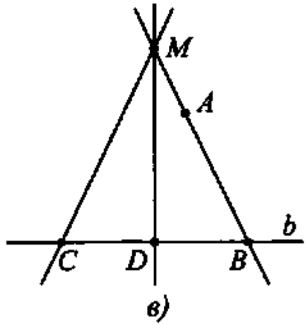


Рис. 3.39

2. Нам нужно восстановить ΔCMB.

Построение:

3. На прямой DB строим точку C, учитывая, что $CD = DB$ (рис. 3.33 б).

4. Проведем через точку D перпендикуляр к прямой CB (рис. 3.33 в).

5. Проведем прямую BA и получим вершину M искомого треугольника (рис. 3.33 в).

6. ΔCMB построен.

3.52. Решение. 1. Нам дана высота треугольника — h и угол при вершине — α (рис. 3.40 а).

2. Анализ. Предположим, что задача решена и ΔABC построен (рис. 3.40 б).

Изучение рисунка подсказывает следующее построение:

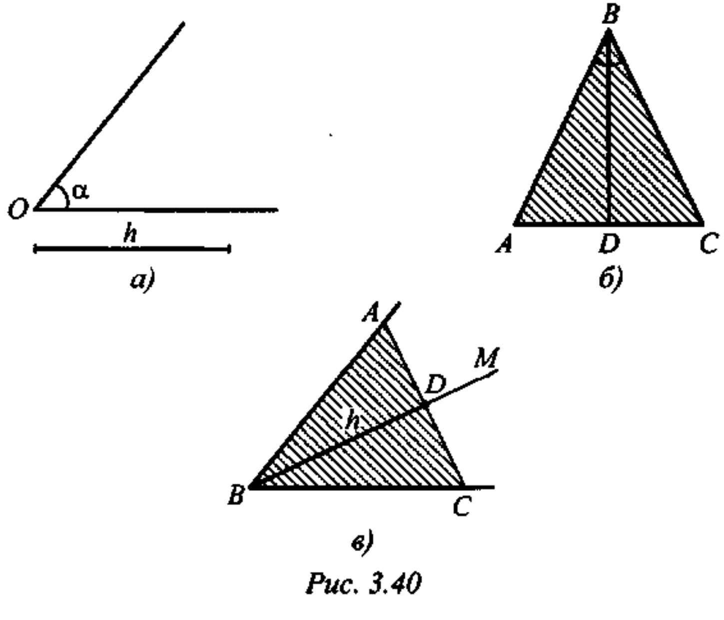


Рис. 3.40

3. Построим угол B, равный α (рис. 3.40 в).

4. Построим его биссектрису BM (рис. 3.40 в).

5. На BM отложим $BD = h$. Это будет высота искомого треугольника.

6. Построим прямую AC, перпендикулярную лучу BM и проходящую через точку D.

7. ΔABC искомый.

3.53. 1. В ΔABC $AB = BC$ (дано) (рис. 3.19).

2. Докажите, что $\angle 5 = \angle 2$.

3. ΔABC — равнобедренный (1, определение равнобедренного треугольника).

4. $\angle 1 = \angle 6$ (3, свойство равнобедренного треугольника).

5. $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 6 = \angle 2$ (1, свойство вертикальных углов).

6. $\angle 5 = \angle 2$ (5).

3.54. Решение. 1. ΔBAC — равнобедренный, точки M и N лежат на прямой BC, $MB = CN$ (дано) (рис. 3.20).

2. Докажите, что ΔMAN равнобедренный. Для доказательства п. 2 нужно доказать, что $MA = NA$, а для этого нужно доказать равенство соответствующих треугольников. Рассмотрим ΔMAB и ΔNAC.

3. $AB = AC$ (1, определение равнобедренного треугольника).

4. $MB = CN$ (1).

5. $\angle ABC = \angle ACB$ (1, свойство равнобедренного треугольника).

6. $\angle ABM = \angle ACN$ (1, 5, свойство внешних углов треугольника).

7. $\Delta MAB = \Delta NAC$ (3, 4, 6, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

8(2). $AM = AN$, ΔMAN — равнобедренный.

3.55. Решение.

1. Даны отрезки AC и BD (основание и биссектриса искомого треугольника) (рис. 3.41 а).

2. Постройте равнобедренный треугольник ABC.

3. Строим луч и на нем откладываем BD — биссектрису угла (рис. 3.41 б).

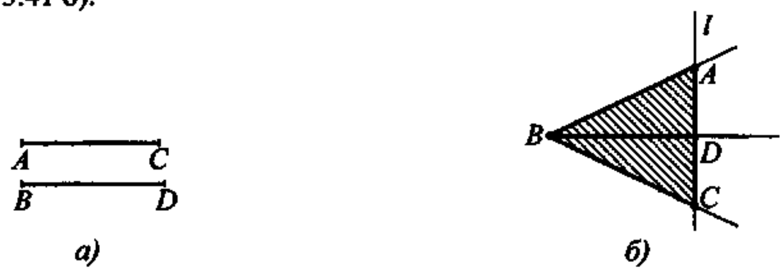


Рис. 3.41

4. В точке D проведем перпендикулярную прямую l, $l \perp AD$ (рис. 3.41 б).

5. От точки D отложим отрезки $DA = DC$ (рис. 3.41 б).

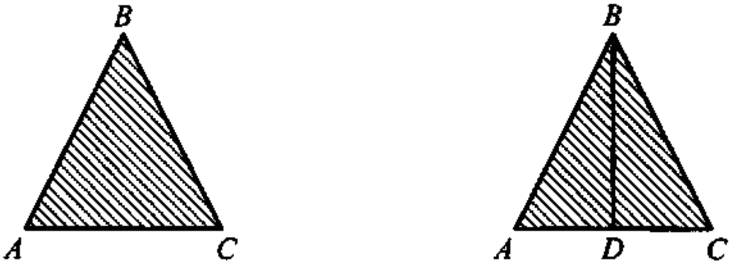
4. Получим равнобедренный треугольник ABC (рис. 3.41 б). При этом мы воспользовались свойством биссектрисы, медианы и высоты равнобедренного треугольника.

3.56. Докажем первую часть теоремы.

1. ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$ (дано) (рис. 3.42 а).

2. $\angle A = \angle C$ (требуется доказать).

Для доказательства п. 2 нам надо иметь два треугольника, в которые входят эти углы и доказать их равенство. Построим эти треугольники.



а) б)

Рис. 3.42

3. Проведем медиану BD ΔABC (построение) (рис. 3.42 б).

4. Получим два треугольника: ΔABD и ΔCBD. В этих треугольниках BD — общая сторона, $AD = DC$ (1, свойства треугольников).

5. $\Delta ABD = \Delta CBD$ (3, 4, признак равенства треугольников по трем сторонам).

6(2). $\angle A = \angle C$ (5, свойство равных треугольников).

Докажем вторую часть теоремы.

1. ΔABC — равнобедренный с основанием AC. } (дано)
2. BD — биссектриса угла при вершине B. } (рис. 3.43)

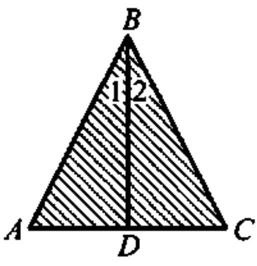


Рис. 3.43

3. BD является медианой и высотой ΔABC (требуется доказать).

4. Треугольник ABC разбился на два — ΔABD и ΔCBD (1, 2).

BD — общая сторона треугольников, $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ (1, 2, свойства равнобедренного треугольника).

5. $\Delta ABD = \Delta CBD$ (5, 6, первый признак равенства треугольников).

6. $AD = DC$ — свойство равных треугольников (а значит, BD — медиана треугольника ABC).

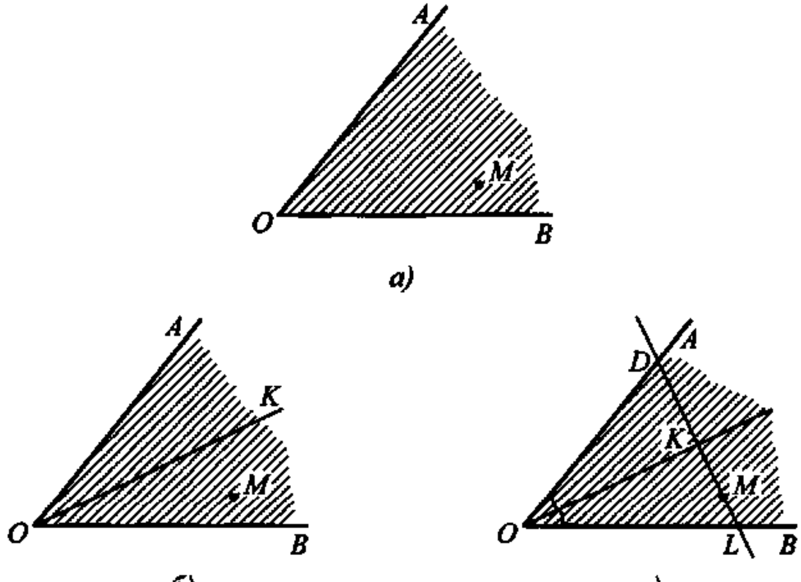
7. $\angle ADB = \angle CDB$ (5, свойства равных треугольников).

8. Так как углы ADB и CDB — смежные и равны между собой, то они — прямые (7, свойство смежных углов).

9. BD является высотой треугольника ABC (7, определение высоты треугольника).

Из вершины B треугольника ABC можно провести только по одной биссектрисе, медиане и высоте. Поэтому медиана, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является его биссектрисой и высотой. Точно так же и высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является его медианой и биссектрисой.

3.58.



а) б) в)

Рис. 3.44

Решение. 1. $\angle AOB$ и точка M внутри угла (дано) (рис. 3.44 а).

2. Проведите через точку M прямую, которая отсечет на сторонах угла равные отрезки.

3. Проведем биссектрису угла AOB (построение) (рис. 3.44 б).

4. Проведем через точку M перпендикуляр к биссектрисе OK (построение) (рис. 3.44 в).

5. В ΔODL OK является одновременно биссектрисой и высотой (1, 3, 4).

6. ΔODL равнобедренный и $OD = OL$ (5, свойство биссектрисы угла равнобедренного треугольника).

3.60. Решение. 1. ΔABC равнобедренный с основанием AC. AD и CF медианы (дано) (рис. 3.45).

2. Докажите, что $\Delta ADB = \Delta CFB$ и $\Delta ADC = \Delta CFB$.

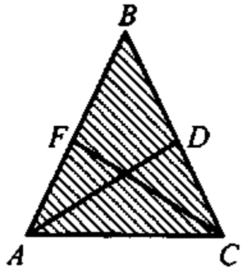


Рис. 3.45

Изучим, что мы знаем об интересующих нас треугольниках.

3. $AB = CB$ (1, определение равнобедренного треугольника).

4. $\angle BAC = \angle BCA$ (1, свойство равнобедренного треугольника).

5. $AF = FB$, $CD = DB$ (1, определение медианы треугольника).

6. $AF = DC$ (3, 5).

7. $\Delta ADC = \Delta CFA$ (6 признак равенства треугольника по двум сторонам и углу между ними).

8. $\Delta ADB = \Delta CFB$ (3, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

3.61. Решение. 1. ΔABC — равнобедренный, CF и AD — биссектрисы углов C и A (дано) (рис. 3.46).

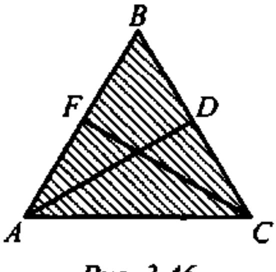


Рис. 3.46

2. Докажите, что

а) $\Delta ADB = \Delta CFB$; б) $\Delta ADC = \Delta CFA$.

3. $\angle A = \angle C$ (1, свойство равнобедренного треугольника).

4. AC — общая сторона.

5. $\angle CAD = \angle FCA$ (половины равных углов).

6. $\Delta AFC = \Delta CDA$ (1, 3, 4, признаки равенства треугольников).

7. $AD = FC$ (5).

8. $\Delta ADB = \Delta CFB$ (1, 4, признаки равенства треугольников).

3.63. Решение. 1. ΔABC равнобедренный, M и N — середины сторон AB и BC, AC — основание ΔABC, K — середина основания (дано) (рис. 3.47).

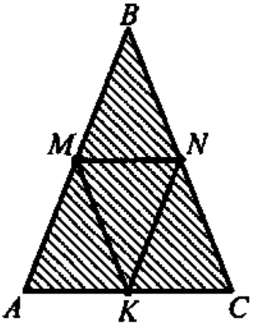


Рис. 3.47

2. Докажите, что $\Delta AMK = \Delta CNK$.

3. $AB = BC$, $AM = CN$ (1, свойство равнобедренного треугольника).

4. $\angle A = \angle C$ (1 свойство равнобедренного треугольника).

5. $\Delta AMK = \Delta CNK$ (1, 3, 4, признаки равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

3.64. Надо доказать, что ΔABK равен ΔCBF (рис. 3.48).

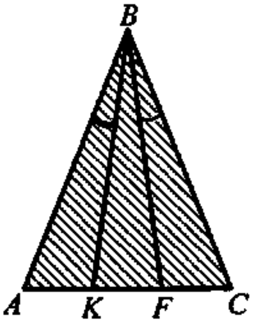


Рис. 3.48

3.65. Решение. а) 1. ΔABC равнобедренный, $AB - AC = 5$, $P_{ABC} = 31$.

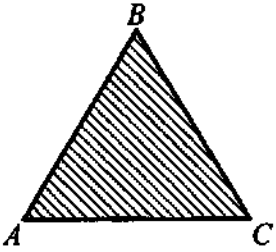


Рис. 3.49

2. Найдите стороны ΔABC.

3. $AB + BC + AC = 31$, $AB = CB$ (1, свойство равнобедренного треугольника).

4. $2AB + AC = 31$ (1, 3);

5. $2(5 + AC) + AC = 31$ (1, 5);

$10 + 3AC = 31$; $3AC = 21$, $AC = 7$.

6. $AB = 12$, $BC = 14$ (5).

3.65. а) 7 см, 12 см, 12 см;

б) 9 см, 9 см, 6 см;

г) 41 см.

Глава 4
ПЕРВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

4.1. Существует достаточно много чертежных инструментов, с помощью которых решаются задачи на построение: односторонняя линейка, двусторонняя линейка, циркуль, угольник, транспортир. В геометрии выделяют два основных инструмента — циркуль и линейка, именно с их помощью решение задачи на построение считается строгим.

4.2. а) С помощью линейки можно построить часть прямой, отрезок, часть луча.

б) С помощью циркуля можно построить окружности данного радиуса с центром в данной точке.

4.3. С помощью линейки и циркуля.

4.4. В геометрии точными считаются построения, выполненные с помощью только двух инструментов: линейки и циркуля.

4.5. а) С помощью линейки нельзя провести окружность.

б) С помощью циркуля нельзя провести прямую.

4.6. Два угла.

4.7. С помощью чертежного треугольника (рис. 4.4) можно построить прямую, проходящую через данную точку O и пересекающую данную прямую a под углом, который равен любому из углов чертежного треугольника; с помощью угольника можно построить перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку (рис. 4.4).

4.8. С помощью транспортира можно строить угол, равный данному.

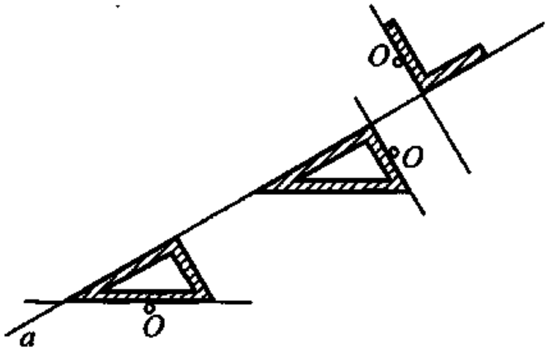


Рис. 4.4

4.9. Решение.

Нам дан отрезок AB, прямая a и на ней точка O (рис. 4.5 а). Постройте на прямой a от точки O отрезок, равный отрезку AB.

Анализ. Предположим, что задача решена и мы на прямой a от точки O отложили отрезок OK, равный данному отрезку AB (рис. 4.5 б).

Построение:

1. Построим прямую a и отметим на ней точку O (рис. 4.5 в).

2. С помощью циркуля построим окружность с центром в точке O и радиусом AB (рис. 4.5 г).

3. Получим нужный нам отрезок $OK = AB$ и отрезок $OK_1 = AB$ (рис. 4.5 г).

Доказательство. Равенство полученных отрезков следует из определения окружности и свойств измерения отрезков.

Исследование. Можно построить два отрезка, равных данному: отрезки OK и OK_1.

Когда мы говорим, что нужно построить окружность, достаточно построить только дуги этой окружности и рассмотреть точки их пересечения с интересующими нас объектами, как показано на рис. 4.5 д.

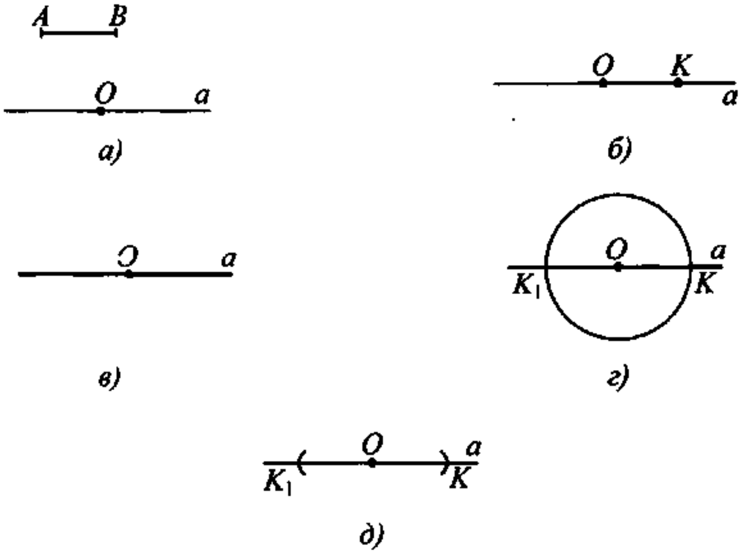


Рис. 4.5

4.10. Решение. Дан угол A и луч OC (рис. 4.6 а). Нужно построить угол с заданной стороной OC, равный данному углу A.

Анализ. Предположим, что задача решена и мы построили $\angle O$, равный $\angle A$ (рис. 4.6 б). Как это можно сделать с помощью циркуля и линейки? Воспользуемся выводом, сделанным ранее: *у равных треугольников соответственные углы равны.* Значит, нам нужно построить равные треугольники, у которых углы O и A будут соответственными, а значит, равными.

Построение. 1. Нам дан угол A и луч OC (рис. 4.7 а).

2. Построим окружности произвольного радиуса r с центрами в точках A и O. Обозначим точки пересечения этих окружностей со сторонами угла A — K и M, и с лучом OC — D (рис. 4.7 б).

3. Измерив расстояние MK, построим окружность с центром D радиуса MK. Обозначим точки пересечения окружностей с центрами в точках O и D — B и B_1 (рис. 4.7 в).

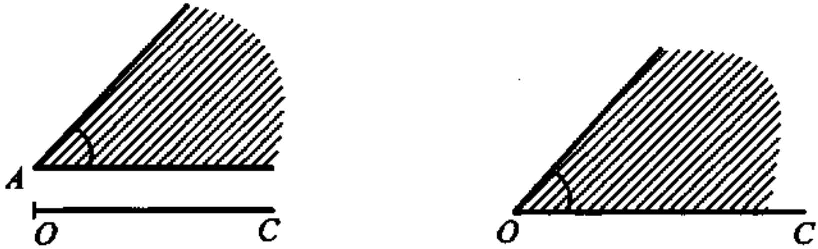
4. Проведем лучи OB и OB_1. Углы BOD и DOB_1 — искомые (рис. 4.7 г).

Доказательство: 1. Соединим точки B и D, B_1 и D (рис. 4.7 д).

2. Мы получили два треугольника BOD и DOB_1, которые равны (1 и 2 этапы построения, признак равенства треугольников).

3. Сравнив эти треугольники с ΔAMK на рис. 4.7 б, мы видим, что все эти треугольники равны. Значит, $\angle A = \angle BOD = \angle DOB_1$ (1, 2, свойство углов в равных треугольниках).

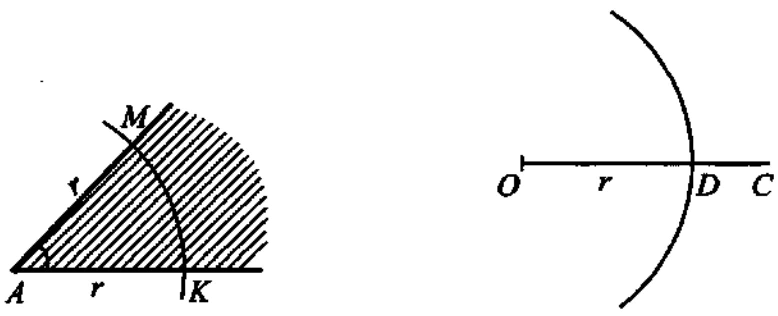
Исследование. Можно построить два угла, равных данному, одна из сторон которых совпадает с данным лучом.



а) *б)*

Рис. 4.6

а)



б)

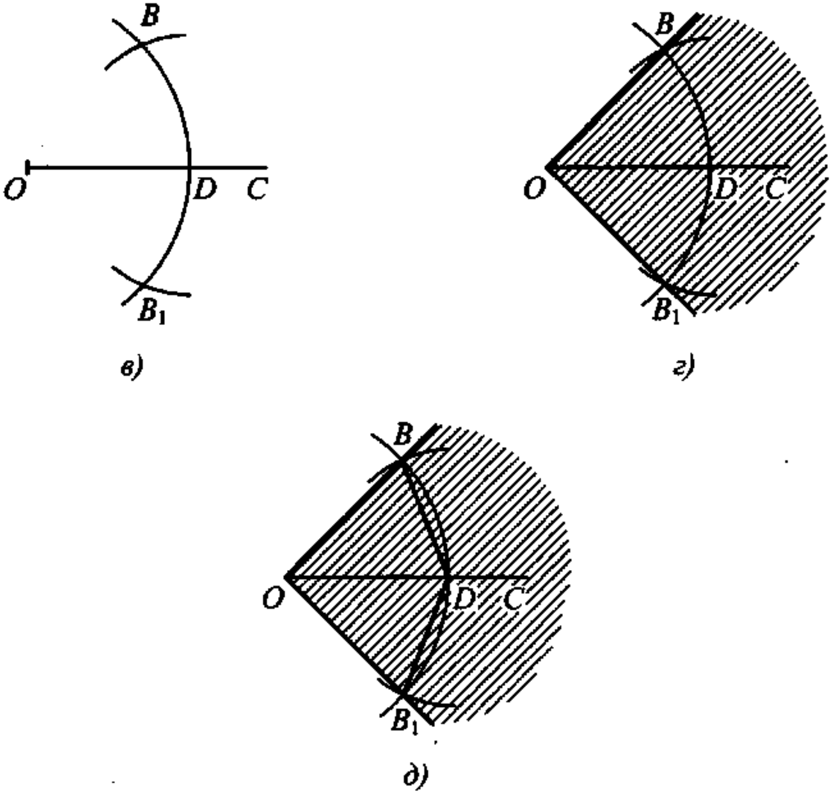


Рис. 4.7

4.11. Решение. Нам дан угол A (рис. 4.8 а). Нужно построить биссектрису этого угла.

Анализ. Предположим, что мы построили биссектрису AD угла A (рис. 4.8 б). Как ее построить с помощью циркуля и линейки?

Ясно, что $\angle 1$ должен быть равен $\angle 2$. Значит, нам нужно построить два равных треугольника, у которых углы *1* и *2* — соответствующие.

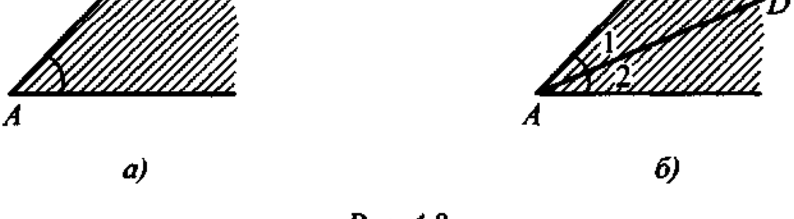


Рис. 4.8

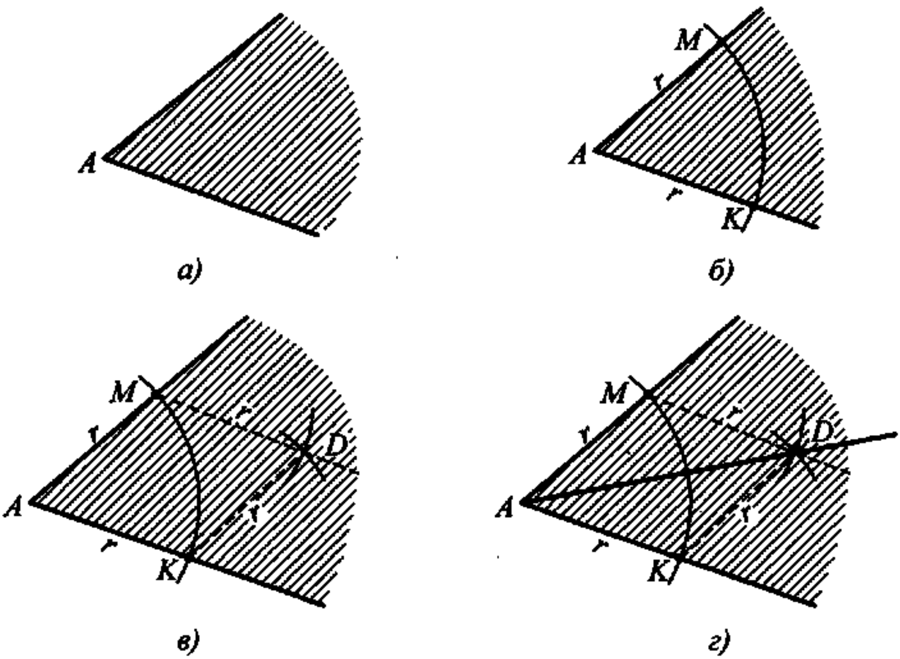


Рис. 4.9

Построение: 1. Нам дан угол A (рис. 4.9 а).

2. Построим окружность произвольного радиуса r с центром в точке A. Пусть M и K — точки ее пересечения со сторонами угла (рис. 4.9 б). Мы получили две стороны нужных нам треугольников.

3. Из точек M и K тем же радиусом r проводим окружности. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A (рис. 4.9 в).

Мы получили еще две стороны MD и KD нужных нам треугольников для построения биссектрисы угла A.

4. Проведем луч AD. AD — общая сторона построенных треугольников и искомая биссектриса угла A (рис. 4.9 г).

Доказательство. Мы получили два треугольника AMD и AKD. Они равны по признаку равенства треугольников — по трем сторонам (обоснуйте это самостоятельно). Из равенства этих треугольников следует равенство углов MAD и KAD.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

4.12. Решение. На рис. 4.10 *а* нам даны три стороны треугольника — отрезки a, b, c. Нам нужно построить треугольник по этим сторонам.

Анализ. Пусть треугольник ABC построен: $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 4.10 б).

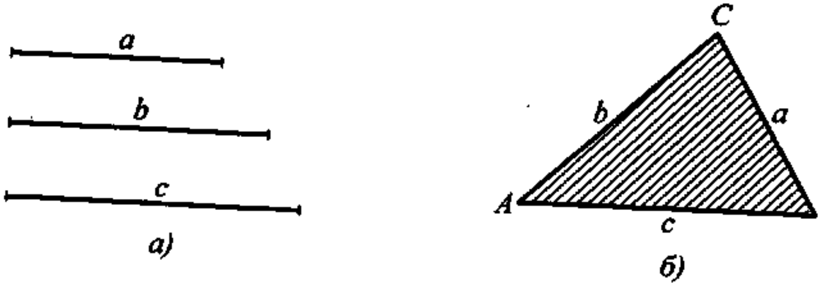


Рис. 4.10

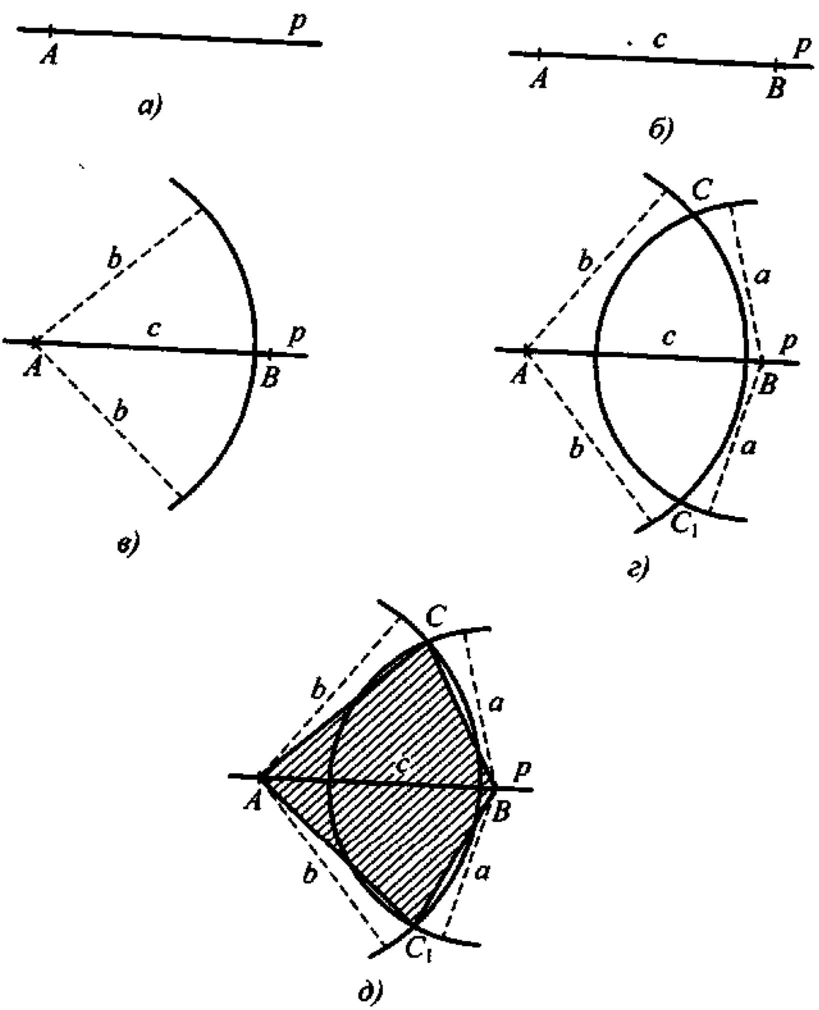


Рис. 4.11

Понятно, что для решения задачи можно на произвольной прямой отложить отрезок AB длиной c. Мы получим две вершины A и B искомого треугольника. Так как стороны a и b нам даны, то найти третью вершину C можно, построив окружность радиусом b с центром в точке A и окружность радиуса a с центром в точке B.

Построение:

1. Проведем произвольную прямую p и отметим на ней точку A (рис. 4.11 а).

2. Отложим на прямой p от точки A отрезок AB, равный данному отрезку c (рис. 4.11 б).

3. Построим окружность с центром в точке A и радиусом b (рис. 4.11 в).

4. Построим окружность с центром в точке B и радиусом a (рис. 4.11 г).

5. Построенные окружности могут пересекаться в точках C и C_1 (рис. 4.11 г).

6. Соединим точки C и C_1 отрезками с точками A и B. Треугольники ABC и ABC_1 (рис. 4.11 д) — искомые.

Доказательство. Действительно, мы построили треугольники со сторонами a, b, c.

Попробуйте самостоятельно найти условие существования решения задачи.

При нашем решении мы сразу построили два искомых треугольника.

Можно было бы выбрать другие точки A и B на расстоянии c. При каждом таком выборе мы могли бы построить еще по два треугольника с заданными сторонами.

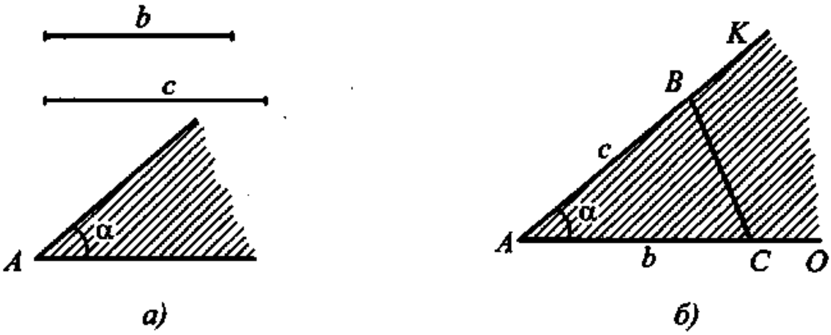


Рис. 4.12

4.13. Решение. Нам даны две стороны b, c и угол между ними (рис. 4.12 а).

Требуется построить треугольник со сторонами b и c и с заданным углом A между ними.

Анализ. Предположим, что задача решена и треугольник ABC построен (рис. 4.12 б). Как можно построить этот треугольник с помощью циркуля и линейки?

На луче AO от точки A отложим сторону b. От луча AO откладываем угол, равный данному углу A. На луче AK от точки A откладываем сторону c. Соединим точки B и C.

Построение:

1. Проведем произвольный луч A_1X (рис. 4.13 а).
2. На луче A_1X отложим отрезок A_1C длины b (рис. 4.13 б).
3. Построим угол A_1, равный углу A (рис. 4.13 в).
4. На луче A_1Y отложим отрезок A_1B длины c (рис. 4.13 г).
5. Проведем отрезок BC. Треугольник A_1BC — искомый (рис. 4.13 г).

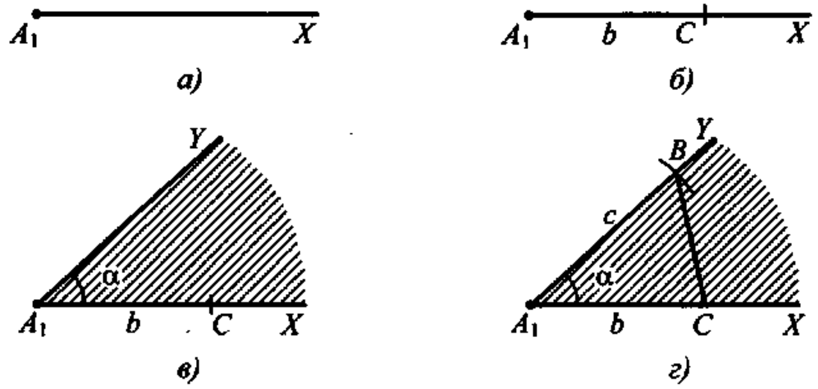


Рис. 4.13

Доказательство и исследование для этой задачи проведите самостоятельно.

4.14. Решение. 1. Нам дан отрезок a и два угла β и γ (рис. 4.14 а).

2. Нужно построить треугольник на основании a и прилежащим к нему углам β и γ.

3. Построим луч BM (рис. 4.14 б).

4. На луче BM построим отрезок BC длины а (рис. 4.14 б).

5. Построим угол CBX величины β (рис. 4.14 б).

6. Построим угол BCY величины γ, расположенной в той же полуплоскости с границей BC, что и угол CBX (рис. 4.14 б).

7. Если лучи BX и CY пересекутся, то построенный треугольник искомый.

С точностью до равенства треугольников задача имеет одно решение.

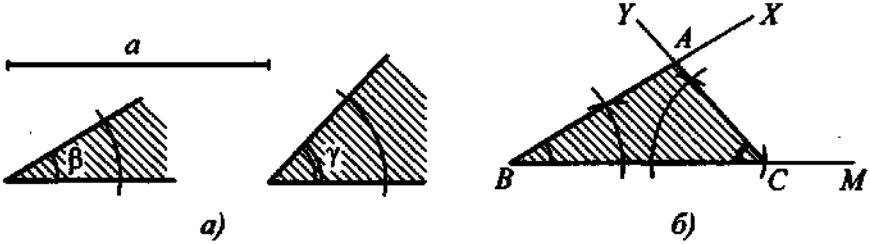


Рис. 4.14

4.15. В нашем случае следует использовать решение задачи 4.10.

4.16. Дважды следует использовать результат решения задачи 4.10.

4.17. Можно по разному решить эту задачу. Можно построить прямой угол с помощью чертежного треугольника или угольника. Можно с помощью циркуля и линейки разделить развернутый угол пополам.

4.18. Следует разделить пополам прямой угол, а затем разделить пополам получившийся угол.

4.22. Воспользуйтесь решением задачи 4.12.

4.23. Так как известны основание и боковая сторона, то значит известна и другая боковая сторона. Следует воспользоваться решением задачи 4.12.

4.24. Надо разделить стороны треугольника пополам.

4.25. Надо разделить угол треугольника пополам.

4.26.

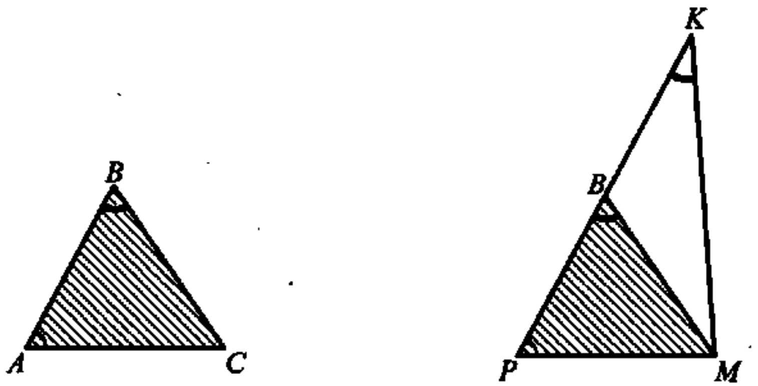


Рис. 4.15

На рис. 4.15 искомый треугольник PKM построен.

4.31. Пусть даны две стороны b и c и угол O, противолежащий стороне b (рис. 4.16 а). Постройте треугольник по этим данным.

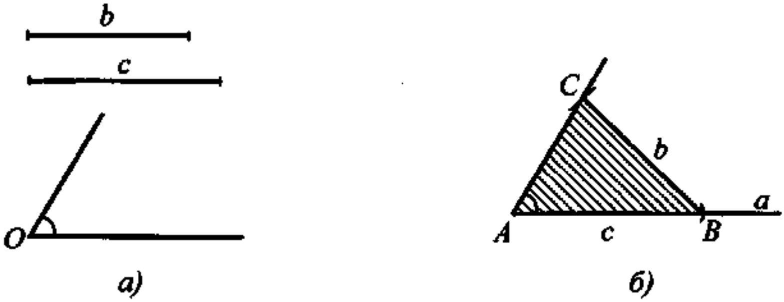


Рис. 4.16

Анализ. Предположим, что задача решена и треугольник ABC построен (рис. 4.16 б).

Как мы будем строить треугольник с помощью циркуля и линейки?

1. На произвольной прямой a построим отрезок AB, равный отрезку c, и на этом отрезке с вершиной в точке A строим угол A, равный углу O (рис. 4.17 а).

2. С центром в точке B проведем окружность радиуса b (рис. 4.17 б).

3. Эта окружность либо вовсе не пересечется со второй стороной угла (рис. 4.17 б), либо будет иметь со второй стороной угла одну общую точку (рис. 4.17 в), либо, наконец, пересечется со второй стороной угла в двух точках (рис. 4.17 г).

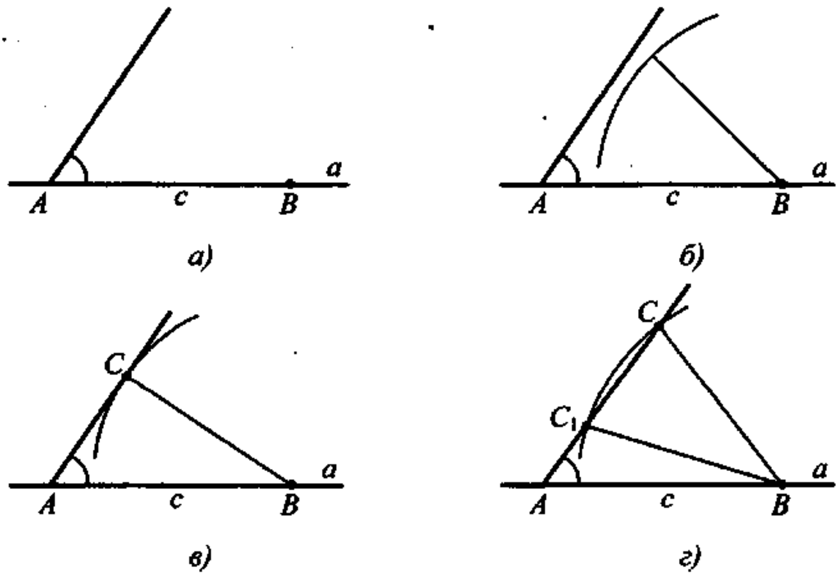


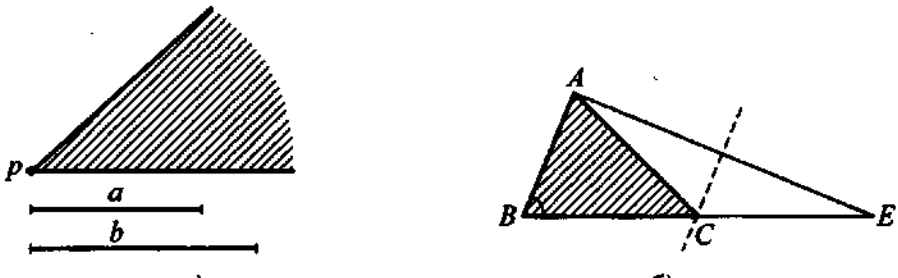
Рис. 4.17

6. Таким образом, задача построения треугольника по двум сторонам b и c и углу O, противолежащему стороне b, может иметь два решения, одно решение или вовсе не иметь решений.

На рис. 4.17 г) треугольники ABC и ABC_1 не равны. Поэтому нельзя сказать, что из равенства двух сторон и угла, противолежащего одной из них, одного треугольника соответствующим сторонам и углу другого треугольника, вытекает равенство этих треугольников.

Мы в этом описании решения объединили анализ, построение и исследование (конечно, все эти этапы можно описать отдельно). Важно понимать, что в этом случае уже нельзя сформулировать признаки равенства треугольников.

4.35. Решение. Дан острый угол P и два данных отрезка a и b (рис. 4.18 а). Нужно построить ΔABC так, чтобы угол B равнялся данному острому углу P, а BA и $BC + AC$ равнялись данным отрезкам a и b.



а) *б)*

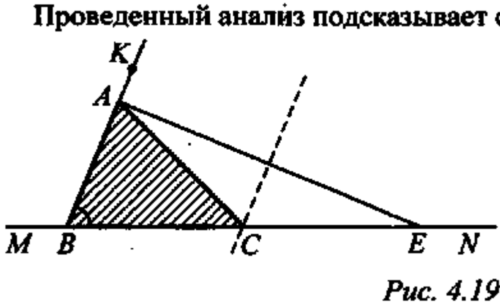
Рис. 4.18

Анализ. 1. Предположим, что ΔABC построен. В нем $\angle ABC = \angle P$, $BA = a$, $BC + CA = b$ (рис. 4.18 б).

2. Продолжим сторону BC за точку C и отложим отрезок CE, равный AC. Тогда $BE = BC + AC$ (рис. 4.18 б).

3. Треугольник ACE равнобедренный. Тогда его вершина C лежит на перпендикуляре к отрезку AE, проведенном через его середину (рис. 4.18 б).

Проведенный анализ подсказывает следующее построение.



$\angle ABN = \angle P$, $BA = a$, $BE = b$.

Рис. 4.19

Построение:

1. На произвольной прямой MN выбираем произвольную точку B и от луча BN откладываем угол KBN, равный данному острому углу P (рис. 4.19).

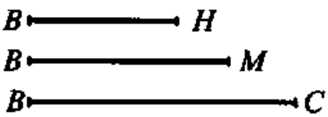
2. На луче BN от точки B откладываем отрезок BE, равный b (рис. 4.19).

3. Точки A и E соединяем и строим прямую, перпендикулярную к отрезку AE, через его середину. Эта прямая пересекает прямую MN в точке C (рис. 4.19).

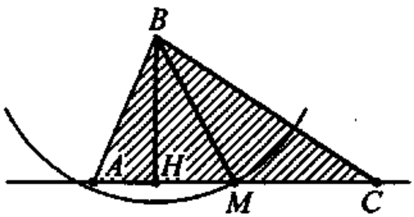
4. ΔABC искомый.

4.47. Решение. Даны сторона ΔABC BC, его медиана BM и высота BH ($BC > BH$) (рис. 4.20 а).

Постройте ΔABC по этим данным.



а)



б)

Рис. 4.20

Построение: 1. По катету BH и гипотенузе BC строим прямоугольный треугольник BHC (рис. 4.20 б).

2. Радиусом, равным BM и центром в точке B строим окружность, которая пересекает прямую HC в точке M (рис. 4.20 б).

3. Отложим отрезок MA, равный MC (рис. 4.20 б).

4. ΔABC искомый.

Задача имеет два решения.

4.41. Нам дан отрезок $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $AC + CB = m$ (рис. 4.21 а).

Нам нужно построить ΔABC по этим данным.

Анализ. 1. Предположим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 4.21 б).

2. По условию $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $AC + CB = m$.

3. Отрезок AB и угол A на рисунке 4.21 б есть. Суммы же отрезков $AC = CB$ на рисунке нет.

4. Сумму этих отрезков можно построить так: продолжим отрезок AC и на луче AC отложим отрезок AK, равный m (рис. 4.21 б).

5. Соединим точки K и B. Получим треугольник AKB, который можно построить (по двум сторонам c и m и углу между ними α) (рис. 4.21 б).

6. ΔKCB равнобедренный (так как $AC + CB = AC + CK$, то $CB = CK$), вершина C принадлежит его оси симметрии.

7. Поэтому после построения треугольника AKB проведем серединный перпендикуляр отрезка KB — прямую l (ось симметрии равнобедренного треугольника BCK) (рис. 4.21 б).

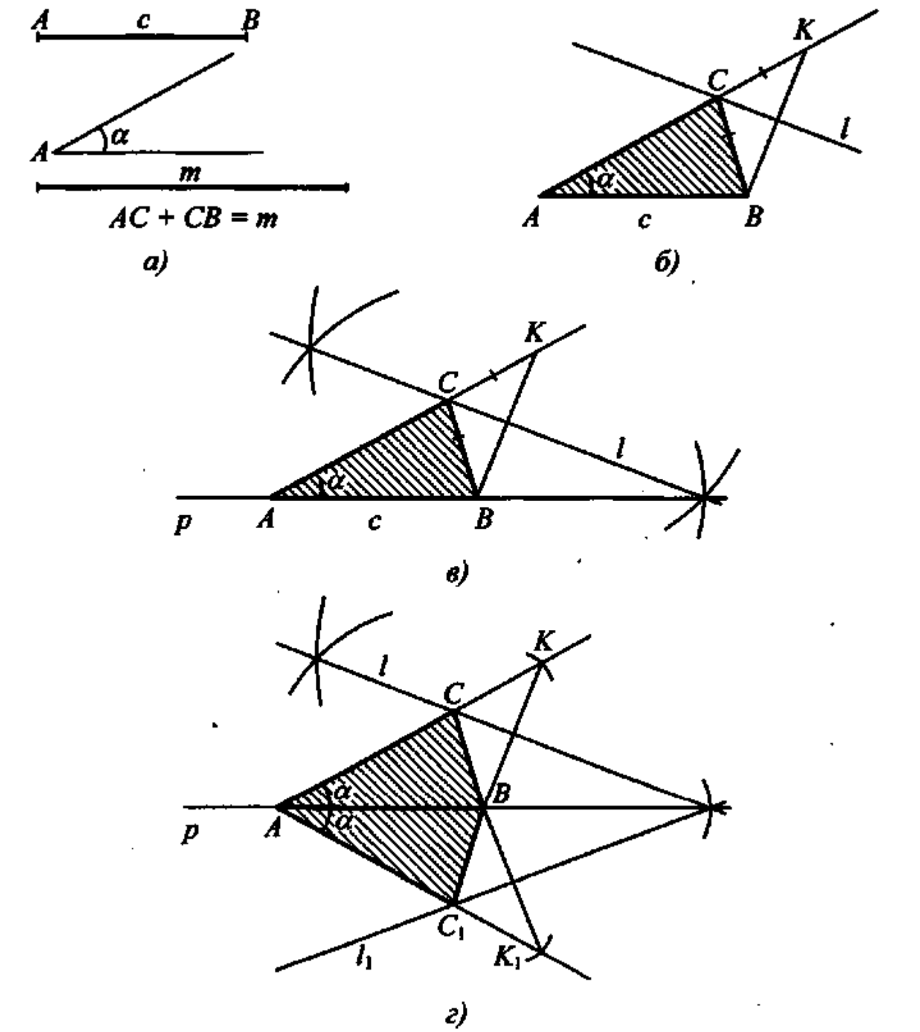


Рис. 4.21

8. Пересечение прямой l и стороны AK и есть третья вершина C искомого треугольника.

Теперь ясен план построения:

— строим ΔAKB по данным: $AB = c$, $AK = m$, $\angle A = \alpha$ (рис. 4.21 в);

— строим серединный перпендикуляр l отрезка BK (рис. 4.21 в);

— точку C пересечения прямой l и стороны AK соединим с вершиной B; получим ΔABC.

Построение. 1. На произвольной прямой p отложим отрезок AB длиной c (рис. 4.21 в).

2. В одной из полуплоскостей, определяемых этой прямой, строим угол A, величина которого равна α.

3. На луче этого угла, не лежащем на прямой AB, отложим отрезок AK, равный m.

4. Соединим точки K и B. Построим ось l симметрии отрезка KB. Получим точку C пересечения прямой l и стороны AK.

5. Соединим точки C и B. Получим треугольник ABC.

Доказательство. 1. $AB = c$, $\angle A = \alpha$ по построению (рис. 4.21 в).

2. Так как точка C принадлежит оси симметрии отрезка BK, то $BC = CK$ (рис. 4.21 в).

3. Поэтому

$AC + CB = AC + CK = m$.

4. Треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Угол A, равный α, можно построить в разных полуплоскостях, определяемых прямой p (рис. 4.21 г). Поэтому можно построить два треугольника AKB и AK_1B, симметричных относительно прямой p, и, следовательно, два треугольника ACB и AC_1B, удовлетворяющие условию задачи. Эти треугольники симметричны относительно прямой p, значит, они равны. Построение выполняется с точностью до равенства фигур, поэтому два построенных треугольника считаются одним решением.

Задача имеет единственное решение, если данные позволяют построить треугольник AKB, т.е. при условии $m > c$.

Глава 5
СИММЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

5.1. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

5.1. 1) Точка O — является центром симметрии.

2) Вершины кубов перейдут в следующие точки: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $D \to D'$, $A' \to A$, $B' \to B$, $C' \to C$, $D' \to D$ и т.д.

3) Вершина A_1' симметрична вершине A_1, D_1' — вершине D_1.

4) На этом рисунке равны все ребра обоих кубов, а также равны отрезки, которые соединяют соответствующие вершины кубов, например $AC = A_1C_1$.

5) Прежде всего на этом рисунке мы имеем два равных куба.

5.2. Отрезок, прямая, окружность, квадрат, ромб.

5.3. 1. Центр симметрии всегда переходит сам в себя (остается на месте).

2. Все расстояния между соответствующими точками фигур сохраняются.

3. Величины соответствующих углов сохраняются.

4. При центральной симметрии каждая фигура переходит в равную ей фигуру.

5.4. При центральной симметрии сам в себя переходит центр симметрии.

5.5. При центральной симметрии сами в себя переходят прямые, содержащие центр симметрии.

5.6. Центр симметрии — середина отрезка AA_1.

5.7. Угол ABC переходит в равный ему угол A_1BC_1 (рис. 5.11).

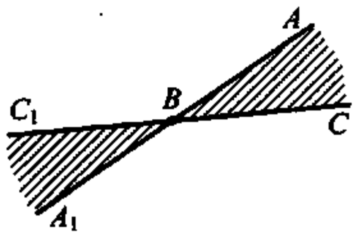


Рис. 5.11

5.8. Окружность переходит сама в себя.

5.9. На рис. 5.2 центр симметрии имеет только фигура, изображенная на рис. 5.2 б.

5.10. а) Отрезок имеет центр симметрии — середину этого отрезка;

б) прямая имеет бесконечное множество центров симметрии — каждая точка, принадлежащая этой прямой;

в) луч не имеет центра симметрии;

г) куб имеет центр симметрии — точку пересечения его диагоналей;

д) шар имеет центр симметрии — центр шара;

е) треугольная пирамида не имеет центра симметрии.

5.11. Прямая имеет бесконечное множество центров симметрии — каждая принадлежащая ей точка.

5.12. Существует — точка пересечения его диагоналей.

5.13. Решение 1. Даны две точки A и O (рис. 5.12 а).

2. Постройте точку A_1, симметричную точке A_1 относительно точки O.

3. Проведем прямую AO и отложим $OA_1 = OA$ (построение) (рис. 5.12 б).

4. Точка A_1 симметрична точке A относительно точки O (1, 3, определение симметрии точек).

Рис. 5.12

5.14. Главное — это показать, что мы получили угол, вертикальный углу A и равный ему.

5.17. Прямая AB переходит сама в себя.

5.18. а) Окружность переходит в себя. б) В равную ей окружность с центром в точке M.

5.20. $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 10$ см, $C_1A_1 = 12$ см. Точка M переходит в точку M_1 — середину стороны B_1C_1.

5.22. Доказательство. 1. Имеем центральную симметрию с центром O, при которой фигура Φ переходит в фигуру Φ_1 (дано) (рис. 5.15).

2. Центральная симметрия является изометрией (требуется доказать).

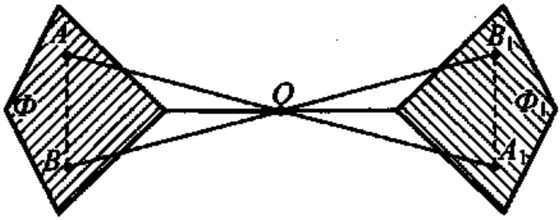


Рис. 5.13

Что означает п. 2.? Ответ таков:

3. Если точки A и B фигуры Φ перешли в точки A_1 и B_1 фигуры Φ_1, то $AB = A_1B_1$ (рис. 5.13) (требуется доказать).

Чтобы доказать равенство этих расстояний, рассмотрим соответствующие треугольники.

4. Рассмотрим ΔAOB и ΔA_1OB_1 (1, 3).

5. $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ (1, свойство вертикальных углов).

6. $AO = A_1O$ и $BO = B_1O$ (1, определение центральной симметрии).

7. $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ (5, 6, признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними).

8. $AB = A_1B_1$ (7, свойство равных треугольников)

9 (2). Центральная симметрия — изометрия (3, определение изометрии).

5.23. 1. Построим окружность с центром O и возьмем на ней произвольную точку A (рис. 5.14 а).

2. Где лежит точка, симметричная точке A относительно центра O?

3. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно центра O.

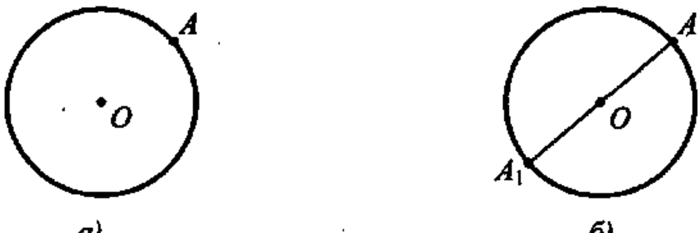


Рис. 5.14

4. Точка A перейдет в некоторую точку A_1 (рис. 5.14 б) (1, 4).

5. Центральная симметрия — изометрия, а значит, $OA = OA_1$ (1, 3, 4, свойство центральной симметрии).

6. По определению окружности точки A и A_1 принадлежат ей (рис. 5.14 б) (1, 5, определение окружности).

7. Таким образом, точка, симметричная точке данной окружности, принадлежит этой же окружности.

5.24. Периметр объединения треугольников равен 4, периметр пересечения — 2.

5.25. *Решение.* 1. Нам даны разделенные препятствием точки A и B (рис. 5.15)

2. Нужно найти расстояние AB.

Идея решения состоит в том, чтобы построить точки, центрально-симметричные данным, расстояние между которыми можно измерить.

3. Выбираем точку O так, чтобы из нее можно было видеть точки A и B и измерить расстояние до них (рис. 5.15).

4. Провешиваем прямые через точки A и O, B и O. Откладываем расстояния $A_1O = AO$ и $B_1O = BO$ (рис. 5.15).

5. Получим две точки A_1 и B_1 в которые при центральной симметрии перешли точки A и B (1, 3, 4).

6. При центральной симметрии соответствующие расстояния сохраняются, то есть $AB = A_1B_1$ (5, свойство центральной симметрии).

7(2). Так как расстояние A_1B_1 можно измерить непосредственно, то задача решена (6).

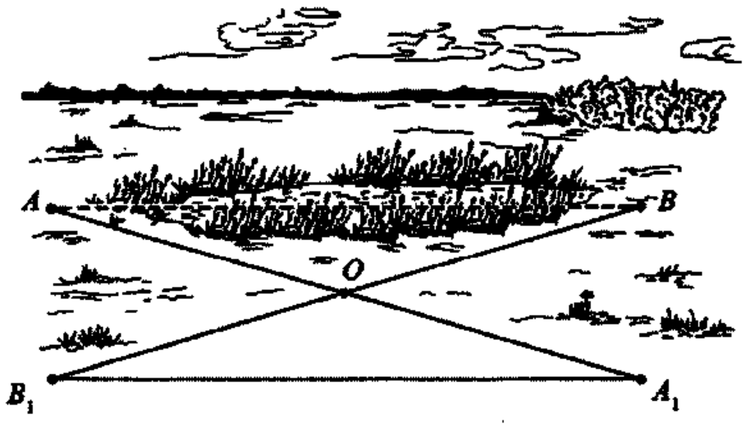


Рис. 5.15

5.29. *Решение.* 1. Пусть треугольник ABC имеет центр симметрии — точку O.

2. Образом отрезка AB при симметрии относительно точки O будет равный и параллельный ему отрезок, т.е. опять-таки отрезок AB, т.е. точка O лежит на отрезке AB (1, свойство центральной симметрии).

3. Точно так же можно показать, что точка O принадлежит и отрезкам BC и AC.

4. Пункты 2 и 3 одновременно выполняться не могут.

5. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно, и значит, треугольник не имеет центра симметрии.

5.30. *Решение.* 1. Дан отрезок MN и угол O (рис. 5.16 а).

2. Постройте ΔABC, у которого сторона AC вдвое меньше стороны BC и равна отрезку MN, а $\angle A = \frac{\angle O}{2}$.

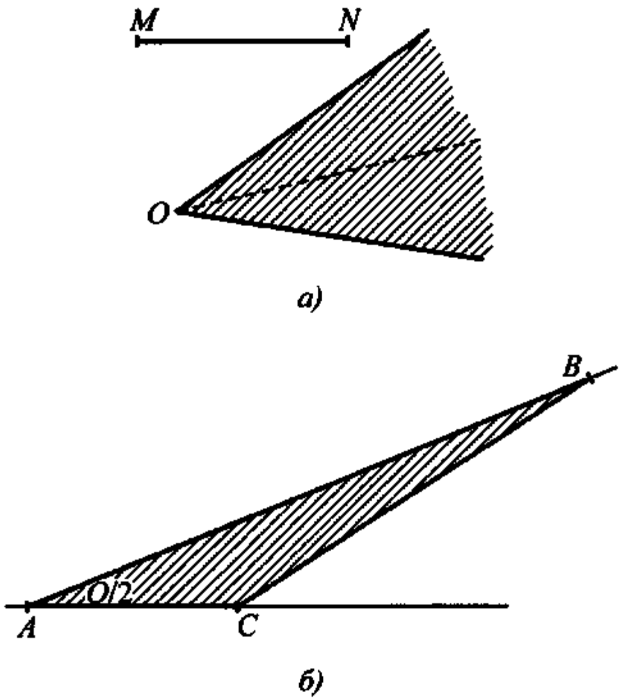


Рис. 5.16

Построение требуемого треугольника можно выполнить следующим образом.

3. На произвольной прямой от произвольной точки A откладываем отрезок AC, равный данному отрезку MN (рис. 5.16 б).

4. Данный угол O делим биссектрисой на два равных угла и откладываем от луча AC угол A, равный половине угла O (рис. 5.16 б).

5. На стороне этого угла от вершины A откладываем отрезок AB, вдвое больший AC (рис. 5.16 б).

6. Треугольник ABC искомый.

5.31. *Решение.* 1. Дан отрезок AB и прямая a (рис. 5.17 а).

2. Постройте ΔABC так, чтобы вершина C лежала на прямой a и $AC = 2AB$.

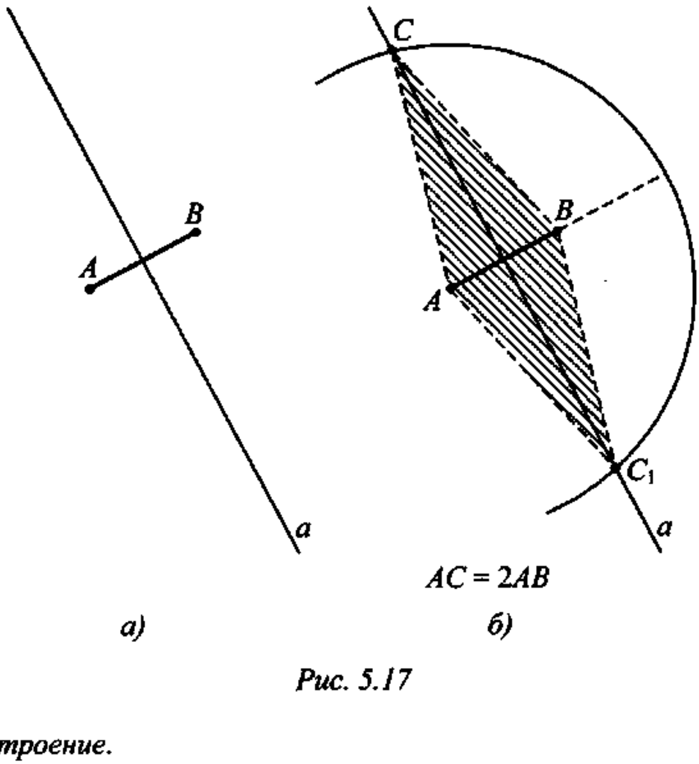


Рис. 5.17

Построение.

1. Необходимо построить окружность с центром в точке A и с радиусом, равным $2AB$ (рис. 5.17 б).

2. Точка пересечения этой окружности с прямой a и будет вершиной C искомого треугольника ABC.

Задача имеет два решения.

5.32. *Решение.* 1. Дан угол Q и отрезок MN (рис. 5.18 а).

2. Постройте ΔABC, у которого $\angle A$ вдвое больше угла B и равный данному углу Q, а сторона AB равна данному отрезку MN.

а) б)

Рис. 5.18

3. На произвольной прямой от произвольной точки A откладываем отрезок AB, равный MN (рис. 5.18 б).

4. От луча AB откладываем угол A, равный углу Q, а от луча BA по ту же сторону от прямой AB откладываем угол B, в 2 раза больший угла A (рис. 5.18 б).

5. Соответствующие стороны построенных углов пересекаются в точке C.

6. Треугольник ABC искомый.

Задача имеет решение, если $\angle Q < 60°$.

5.33. *Решение.* Игроку, начинающему игру, следует первым же ходом занять площадку в центре листа, положив фигуру так, чтобы ее центр симметрии, по возможности, совпал с центром листа бумаги и в дальнейшем класть свою фигуру симметрично положению фигуры противника (рис. 5.19). Придерживаясь этого правила, игрок, начинающий игру, всегда найдет на листе бумаги место для своей фигуры и неизбежно выиграет.

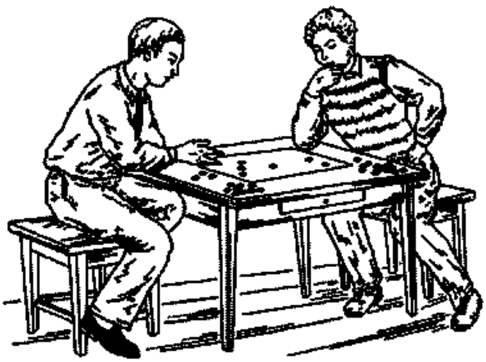


Рис. 5.19

Геометрическая сущность указанного способа ведения игры в следующем: прямоугольник имеет центр симметрии, т.е. точку, в которой все проходящие через нее отрезки прямых делятся пополам и делят фигуру на две равные части. Поэтому каждой точке или площадке прямоугольника соответствует симметричная точка или площадка, принадлежащая той же фигуре, и только центр прямоугольника симметричной себе точки не имеет. Отсюда следует, что если первый игрок займет центральную площадку, то, какое бы место ни выбрал для своей фигуры его противник, на прямоугольном листе бумаги обязательно найдется свободная площадка, симметричная площадке, занятой фигурой противника. Так как выбирать место для фигуры приходится каждый раз второму игроку, то в конце концов не останется места на бумаге именно для его фигур, и игру выиграет первый игрок.

5.38. *Решение.* Выигрышная стратегия второй девочки такова: своим первым ходом она отрывает один или два лепестка, противоположных оторванным первой девочкой, так, чтобы лепестки ромашки разделились на две симметричные половины. При следующих ходах первой девочкой вторая отрывает лепестки, симметричные оторванным первой.

5.2. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

5.35. 1) Симметричными точками являются пары точек: A и A_1, B и B_1, C и C_1.

2) На этом рисунке равны между собой расстояния: $AO_1 = O_1A_1$, $BO_2 = O_2B_1$, $CO_3 = O_3C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = AC_1$.

3) $AA_1 \perp l_1$, $BB_1 \perp l_1$, $CC_1 \perp l$.

5.36. 1) Точка A переходит в точку A_1, точка B — в точку B_1, точка C — в точку C_1, точка D — в точку D_1.

2) Сами в себя переходят все точки оси l.

3) Сохраняются расстояния между соответствующими вершинами четырехугольников:

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$, равны также расстояния от точек A, B, C, D до оси l.

4) Четырехугольник $OABC$ переходит в равный ему четырехугольник $O_1A_1B_1C_1$.

5.37. Точки оси симметрии оказываются неподвижными.

5.38. а) Отрезок на плоскости имеет две оси симметрии;

б) луч имеет одну ось симметрии;

в) прямая имеет бесконечное множество осей симметрии;

г) окружность имеет бесконечное множество осей симметрии;

д) круг имеет бесконечное множество осей симметрии.

5.39. Разносторонний треугольник не имеет осей симметрии. Равнобедренный треугольник имеет одну ось симметрии. Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии.

5.40. Выберем ось симметрии произвольно, например так, что сторона квадрата принадлежит оси симметрии.

5.41. 1) Величины углов сохраняются;

2) Отрезок переходит в равный ему отрезок;

3) Треугольник переходит в равный ему треугольник.

4) Неподвижными являются точки оси симметрии.

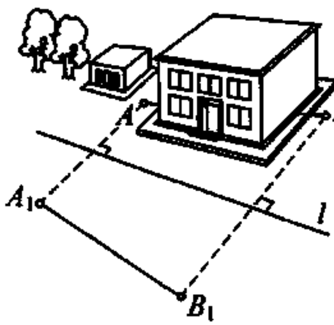
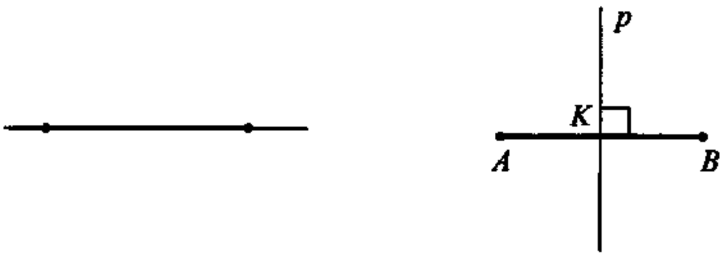


Рис. 5.20

5.43. Решение этой задачи сводится к построению точек A_1 и B_1, симметричных точкам A и B относительно некоторой выбранной оси l (рис. 5.20).

Объясните, почему длина отрезка A_1B_1 дает ответ на вопрос задачи.

5.44. *Каждый отрезок на плоскости имеет две оси симметрии.* Одна из них — прямая, содержащая этот отрезок (рис. 5.21 а), а другая — серединный перпендикуляр к отрезку (рис. 5.21 б).



а) *б)*

Рис. 5.21

5.45. *Доказательство.* 1. Пусть произвольные точки X и Y фигуры F при симметрии относительно прямой l переходят в точки X_1 и Y_1 (рис. 5.23).

2. Докажем, что $XY = X_1Y_1$.

3. Рассмотрим сначала случай, когда точки X и Y не лежат на одном перпендикуляре к прямой l.

4. Если K и P — точки пересечения отрезков XX_1 и YY_1 с прямой l, то прямоугольные треугольники XKP и X_1KP равны (по двум катетам) (рис. 5.22).

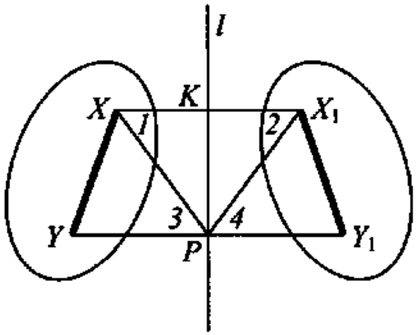


Рис. 5.22

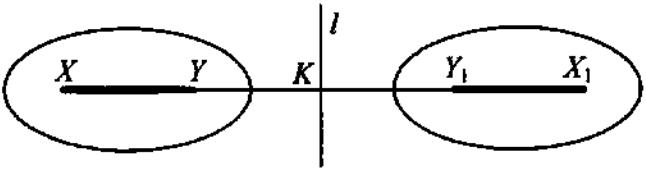


Рис. 5.23

5. Следовательно, $XP = X_1P$ и $\angle 1 = \angle 2$.

6. Тогда имеем $\angle 3 = \angle 4$, $\Delta XYP = \Delta X_1Y_1P$, $XY = X_1Y_1$.

7. Если точки X, Y, X_1, Y_1 лежат на одной прямой (рис. 5.23), то $XY = |KX - KY| = |KX_1 - KY_1| = X_1Y_1$.

8. Итак, всегда $XY = X_1Y_1$.

Замечание. Эту теорему мы доказали, ссылаясь на признак равенства прямоугольных треугольников, который еще не изучался. Однако этот признак достаточно понятен.

5.46. *Доказательство.*

1. $\angle ABC$ и BM — его биссектриса. (дано) (рис. 5.24).

2. Прямая *p*, содержащая биссектрису *BM* угла *ABC* — ось симметрии угла *ABC* (требуется доказать).

3. $\angle ABM = \angle CBM$ (1).

4. Рассмотрим осевую симметрию всей фигуры на рис. 5.24 относительно прямой *p*.

5. При этой симметрии луч *BM* переходит в себя, а угол *ABM* — в угол со стороной *BM*, лежащий в другой полуплоскости относительно прямой *p* и равный углу *ABM* (1, 2, 3, свойства осевой симметрии).

6. В полуплоскости с границей *BM* существует единственный угол со стороной *BM*, равный данному углу *ABM* (1, 3, свойства откладывания углов).

7. Луч *BA* при выполненной симметрии переходит в луч *BC*, а луч *BC* — в луч *BA* (1,5).

8(2). Угол *ABC* при выполненной осевой симметрии переходит в себя (4, 5, 6, 7).

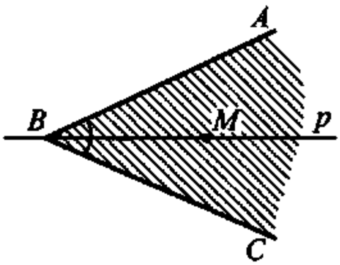


Рис. 5.24

5.47. *Доказательство.*

1. ΔABC — равнобедренный, *AC* — его основание.
2. *BM* — биссектриса угла при вершине *B* треугольника *ABC*.

} (дано) (рис. 5.25)

3. Прямая *BM* является осью симметрии ΔABC (требуется доказать).

4. Выполним осевую симметрию ΔABC относительно прямой *BM*.

5. При этой симметрии луч *BM* перейдет в себя, а лучи *BC* и *BA* — друг в друга (1, 2, 4, задача 5.41).

6. $AB = BC$ (1, определение равнобедренного треугольника).

7. Точка *A* перейдет в точку *C*, а точка *C* — в точку *A* (1, 2, 4, 5, 6, свойства осевой симметрии).

8. Точка *B* останется на месте (4 определение осевой симметрии).

9. При симметрии относительно оси *BM* равнобедренный треугольник *ABC* переходит в себя (7, 8, свойство осевой симметрии).

10(3). Прямая BM является осью симметрии ΔABC (9).

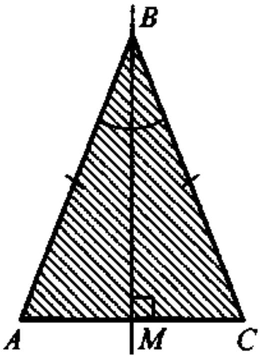


Рис. 5.25

5.48. *Доказательство.*

1. ΔABC — равнобедренный. (дано)
2. BD — биссектриса угла треугольника ABC. (рис. 5.26)

3. BD является медианой и высотой ΔABC (требуется доказать).

4. Рассмотрим осевую симметрию ΔABC относительно оси BD.

5. Точки A и C симметричны друг другу относительно оси BD (1, 2, 4)

6. Точка D перейдет сама в себя (4 определение осевой симметрии).

7. $AD = CD$ (5, 6, свойство осевой симметрии).

(3). BD — медиана ΔABC (1, 2, 7).

8. $\angle BDA = \angle BDC$ (1, 2, 6, свойства осевой симметрии).

9. $\angle BDA = \angle BDC = 90°$ (8, свойство смежных углов).

10(3). BD — высота ΔABC (1, 2, 9).

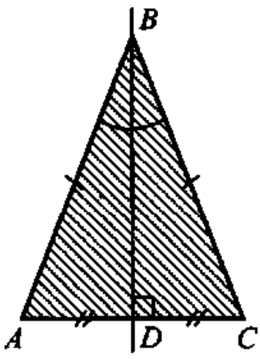


Рис. 5.26

5.49. *Доказательство.*

1. $OA \perp a$, O — проекция точки A на прямую a. (дано)
2. AB — наклонная к прямой a. (рис. 5.27 а)

3. $AO < AB$ (требуется доказать).

Воспользуемся свойствами осевой симметрии.

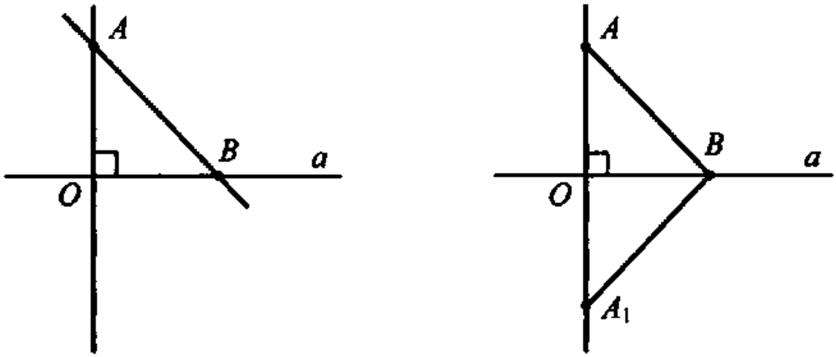
4. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой a (построение) (рис. 5.27 б).

5. Так как $B \in a$ и $B \neq O$, то точка B при осевой симметрии перейдет сама в себя (4, свойство осевой симметрии).

6. Используя неравенство треугольника, имеем:

$AB + BA_1 > AA_1$ (1, 2, 4, 5, неравенство треугольника).

7. $2AB > 2AO$, $AB > AO$.



а) *б)*

Рис. 5.27

5.50. *Доказательство.*

1. Прямые a и b перпендикулярны. (дано)
2. Симметрия относительно прямой b. (рис. 5.28 а)

3. Прямая a при симметрии относительно прямой b переходит сама в себя (требуется доказать).

Из задачи 5.41 следует, что при осевой симметрии угол переходит в равный ему угол.

Рассмотрим любой из углов, образованных при пересечении прямых a и b, например, угол со сторонами a_1 и b_1. Этот угол по условию равен 90° (рис. 5.28 б).

4. В результате симметрии относительно прямой b этот угол перейдет в равный ему угол. Но при этом луч b_1 перейдет сам в себя. Значит, луч a_1 перейдет в луч a_2 (1, 2, задача 5.46).

5(3). Прямая a при симметрии относительно прямой b переходит сама в себя (4).

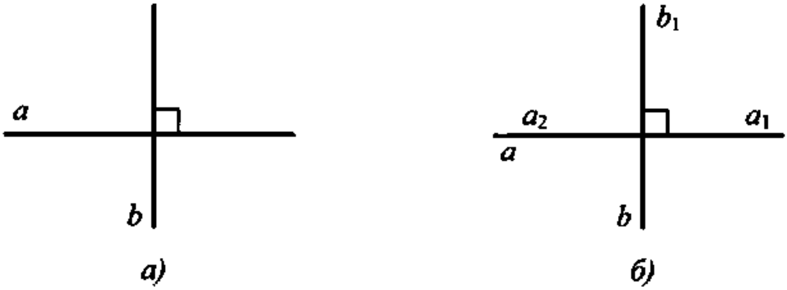


Рис. 5.28

5.51. При доказательстве теоремы следует рассмотреть два случая.

Случай 1. $A \in a$.

В этом случае в каждой из двух полуплоскостей с границей a существует лишь один луч, образующий прямые углы с обеими полупрямыми, на которые точка A разбивает прямую a. Эти два луча лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой a.

Случай 2. $A \notin a$.

1. Даны прямая a и точка A, $A \notin a$ (дано) (рис. 5.29 а).

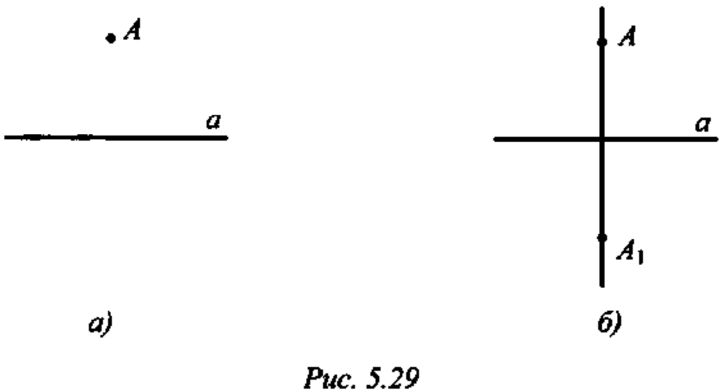


Рис. 5.29

2. Через точку A можно провести единственную прямую, перпендикулярную прямой a (требуется доказать).

Все построения мы выполняем в плоскости, образованной прямой a и точкой A. Воспользуемся свойствами осевой симметрии.

3. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой a (построение) (рис. 5.29 б) (1, определение осевой симметрии).

4. Прямая, перпендикулярная а, в результате симметрии относительно прямой a переходит сама в себя (1, 3, свойства осевой симметрии).

5. Если эта прямая проходила через точку A, то она должна проходить и через точкуA_1 (1, 4).

6(2). Через точку A можно провести единственную прямую, перпендикулярную прямой a. (5, аксиома прямой).

5.57. *Решение.*

1. Точки A и A' симметричны друг другу относительно оси l и произвольной точки B (рис. 5.30 а).

2. Построить $B' = S_l(B)$, пользуясь только линейкой.

3. Пусть точки A и B находятся в одной полуплоскости относительно l (рис. 5.30 а).

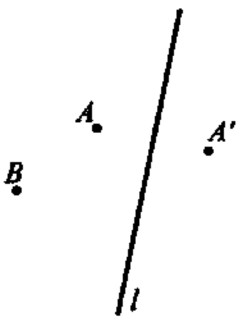
4. Прямая BA пересекает l в точке M, а прямая BA' пересекает l в точке N (рис. 5.30 б).

5. Прямые MA и MA', а также AN и $A'N$ симметричны относительно l (рис. 5.30 б).

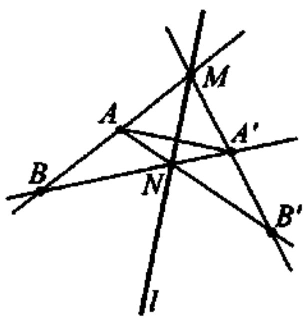
6. Прямая MA пересекает прямую NA' в точке B, поэтому прямая MA' пересекает прямую NA в точке B' (рис. 5. 30 б).

7. Отсюда и вытекает требуемое построение.

Если прямая AB не пересекает ось (в пределах чертежа) l, то можно воспользоваться вспомогательной точкой C, расположив ее так, чтобы и прямая CA и прямая CB пересекались с прямой l. Найдя точку C', симметричную C, с ее помощью мы можем построить точку B'.



а)



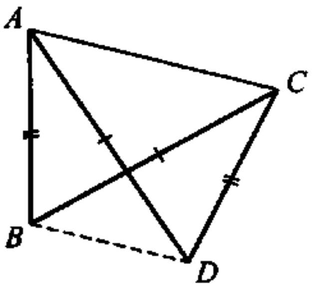
б)

Рис. 5.30

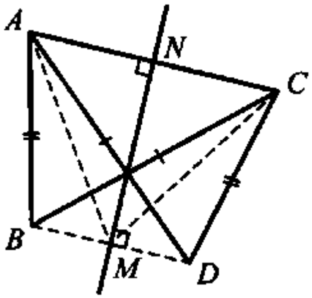
5.58. *Решение.* 1. Имеется ломаная $ABCDA$, $AB = CD$, $BC = DA$ (дано) (рис. 5.31 а).

2. Обладает ли ломаная $ABCDA$ осью симметрии.

3. Треугольники BAD и DCB равны по трем сторонам (рис. 5.31 б).



а)



б)

Рис. 5.31

4. Если M — середина отрезка BD, то $AM = CM$ (соответственные медианы в равных треугольниках равны).

5. Пусть точка N — середина отрезка AC и $N \neq M$.

Тогда MN — ось симметрии отрезка AC.

6. Аналогично можно показать, что MN — ось симметрии отрезка BD.

7. При симметрии с осью MN, проходящей через середины отрезков AC и BD, ломаная $ABCDA$ переходит в ломаную $CDABC$, т.е. в себя.

8. Если же $M = N$, то данная ломаная плоская, имеющая центр симметрии. Прямая, проходящая через этот центр перпендикулярно плоскости ломаной, есть искомая ось симметрии.

Обратное утверждение очевидно, если ось симметрии проходит через середины отрезков AC и BD.

5.59. *Решение.* 1. Прямая MN пересекает отрезок AB (дано) (рис. 5.32 а).

2. Найдите такую точку X, принадлежащую прямой MN, чтобы прямая MN служила биссектрисой $\angle AXB$.

3. Построим точку A', симметричную точке A относительно прямой MN (построение) (рис. 5.32 б).

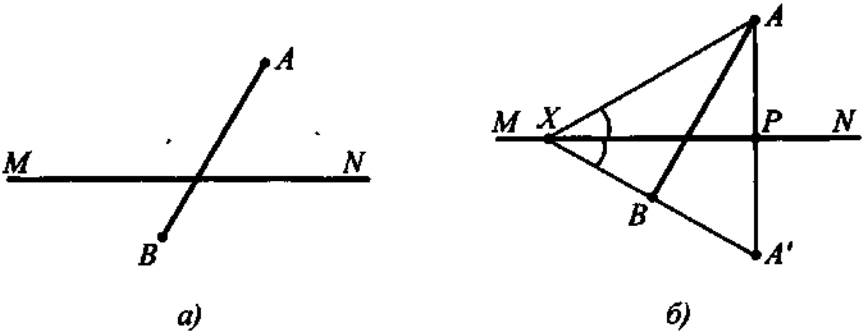


Рис. 5.32

4. По определению осевой симметрии $AP = A'P$ и $\angle MPA = \angle MPA' = 90°$.

5. Соединим точки A' и B (построение) (рис. 5.32 б).

6. Построим треугольник AXP и $A'XP$ (рис. 5.32 б).

7. $\Delta XPA = \Delta XPA'$ и, следовательно, $\angle PXA = \angle PXA'$.

8. Точка X — искомая.

Задача имеет единственное решение, если расстояния точек A и B от прямой MN не одинаковы. Если эти расстояния одинаковы, но точки A и B не симметричны относительно прямой MN, то задача вовсе не имеет решения (так как прямая $A'B$ будет параллельной прямой MN). Наконец, если точки A и B симметричны относительно MN, то задача становится неопределенной: любая точка прямой MN удовлетворяет в этом случае условию задачи.

5.60. *Решение.* 1. Даны точки A и B, разделенные прямой l (рис. 5.33 а).

2. Построить прямые a и b, проходящая через точки A и B так, чтобы угол между ними делили прямую l пополам.

3. Предположим, что мы построим прямые a и b — искомые (рис. 5.33 б). Симметрия относительно прямой l переводит a в b (прямая l содержит биссектрису угла AOB), при этом точка A переходит в точку A'. Точки A' и B определяют прямую b (рис. 5.33 в).

Проведенный анализ определяет следующий путь построения:

1. Строим $A' = S_l(A)$.

2. Строим точку O — пересечение прямых $A'B$ и l.

3. Проводим прямую AO.

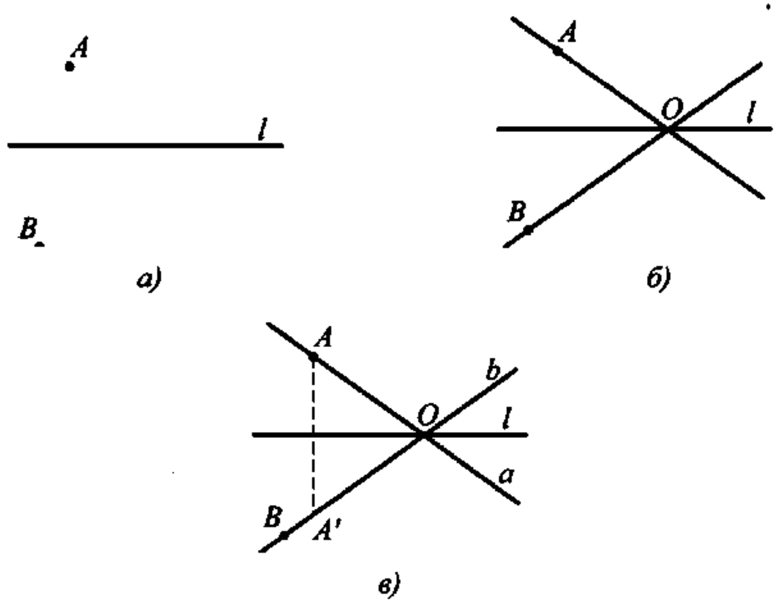


Рис. 5.33

Задача имеет единственное решение, если точки A и B находятся на различных расстояниях от прямой l и не принадлежат прямой, перпендикулярной l; не имеет решения, если точки A и B находятся на одинаковых расстояниях, от прямой l, но не принадлежат прямой, перпендикулярной l, или принадлежат прямой, перпендикулярной l, и находятся на различных расстояниях от нее, и имеет бесконечное множество решений, если $AB \perp l$ и AB делится прямой l пополам.

5.61. *Решение.*

1. Даны прямые a и b и точка A на прямой a (рис. 5.34 а).

2. Постройте точку C, принадлежащую прямой a, такую, чтобы расстояние от нее до прямой B равнялось AC.

3. Предположим, что точка C — искомая (рис. 5.34 б).

4. Так как $CA = CB$ $(B \in b)$, то точки B и A симметричны относительно прямой, содержащей биссектрису угла ACB.

5. Пусть ось симметрии точек A и B пересекает прямую b в точке M, тогда $\angle MAC = 90°$.

6. Отсюда вытекает построение:

— из точки A восстанавливаем перпендикуляр к прямой a;

— отмечаем точку пересечения этого перпендикуляра с прямой b;

— строим биссектрису угла AMK, где $K \in b$;

— точка пересечения биссектрисы угла и прямой a является искомой.

— построив биссектрису угла, внешнего углу AMK, получим вторую точку C, удовлетворяющую требованию.

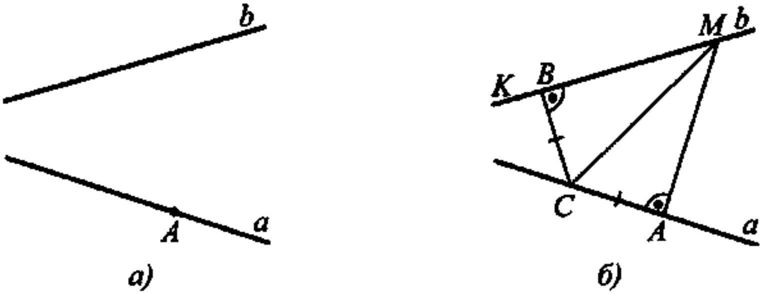


Рис. 5.34

5.62. *Решение.*

А. Рассмотрим решение задачи для остроугольного треугольника ABC.

1. Дан остроугольный ΔABC (рис. 5.35 а).

2. Докажем, что высоты этого треугольника пересекаются в одной точке.

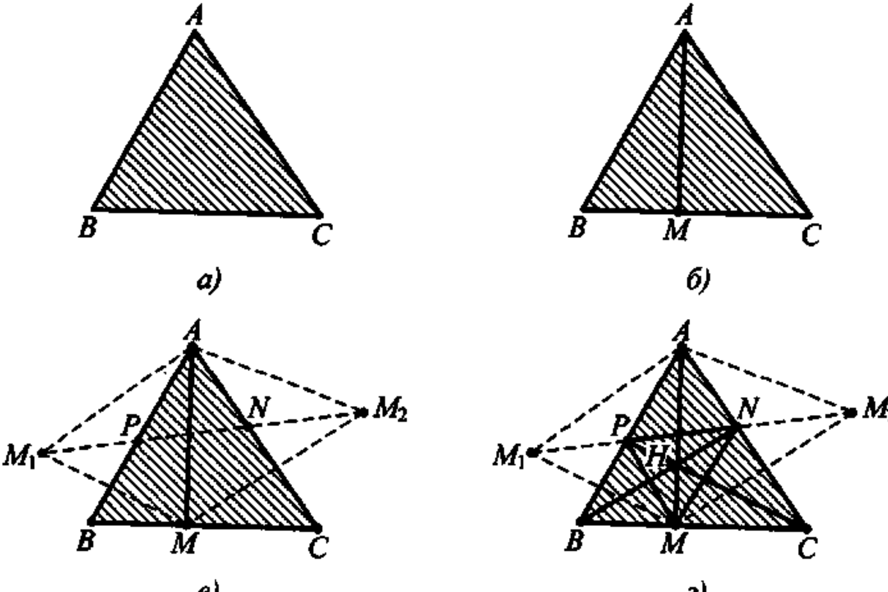


Рис. 5.35

3. Проведем через вершину A высоту треугольника, которая пересечет сторону BC в точке M, лежащей между точками B и C; если бы, например, точка M оказалась левее точки B, то в ΔAMB внешний острый угол при вершине B оказался бы *меньше* внутреннего прямого угла при вершине M.

4. Построим точки M_1 и M_2, симметричные с M относительно прямых AB и AC (построение) (рис. 5.35 б).

5. Угол M_1AM_2 вдвое больше угла BAC (рис. 5.35 в) так как в силу симметрии $\angle MAB = \angle BAM_1$, $\angle MAC = \angle CAM_2$, причем $\angle MAB + \angle MAC = \angle BAC$.

6. Из п. 4 и 5 следует, что $\angle M_1AM_2$ меньше развернутого, так как $\angle BAC$ острый.

7. Отрезок M_1M_2 пересекает лучи AC и AB, идущие внутри этого угла, в точках, которые мы обозначим соответственно N и P (рис. 5.35 в).

8. Рассмотрим теперь треугольник MNP (рис. 5.35 г). На прямых AB и AC лежат биссектрисы внешних углов этого треугольника, поэтому через точку A их пересечения проходит и биссектриса внутреннего угла, т.е. MA есть биссектриса угла NMP. Прямая BC перпендикулярна к AM, поэтому она является внешней биссектрисой треугольника MNP.

9. В точке B пересекаются биссектрисы внешних углов треугольника MNP, поэтому прямая BN будет биссектрисой внутреннего угла MNP; вместе с тем она перпендикулярна к биссектрисе внешнего угла, т.е. $BN \perp AC$. Точно так же PC есть биссектриса внутреннего угла MPN и потому перпендикулярна к биссектрисе внешнего угла, т.е. к прямой AB.

10. Итак, AM, BN и CP — биссектрисы внутренних углов треугольника MNP и потому пересекаются в одной и той же точке H.

11. Но эти же прямые AM, BN и CP являются высотными прямыми в треугольнике ABC, чем и доказано предложение для остроугольного треугольника. Точка H пересечения этих прямых называется ортоцентром треугольника.

Б. Если ΔABC — прямоугольный с вершиной прямого угла в точке C, то высотами треугольника будут BC и CA, идущие по катетам. Они пересекаются в точке, через которую проходит также и высота, перпендикулярная к гипотенузе AB. Таким образом, ортоцентром прямоугольного треугольника служит вершина С прямого угла.

В. 1. Пусть теперь ΔABC — тупоугольный, причем вершина тупого угла находится в точке А (рис. 5.36 а).

2. Прямые, содержащие высоты BN и CP пересекаются в некоторой точке H. Эти прямые не могут быть параллельными, так как тогда были бы параллельны между собой и перпендикулярные к ним прямые CA и AB (рис. 5.36 б).

3. Полученный ΔBCH — остроугольный, так как каждый из его углов $\angle BHC$, $\angle CBH$ и $\angle BCH$ является острым углом соответственно в одном из прямоугольных треугольников BPH, BNC, PBC.

4. Уже доказано, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

5. В треугольнике BCH высотами являются BP и CN, пересекающиеся в точке A. Поэтому через точку A должна пройти и третья высота HM, проходящая через точку H перпендикулярно к BC.

6. Вместе с тем мы установили, что и в тупоугольном треугольнике прямые, содержащие высоты AM, BN и CP, проходят через один и тот же ортоцентр H.

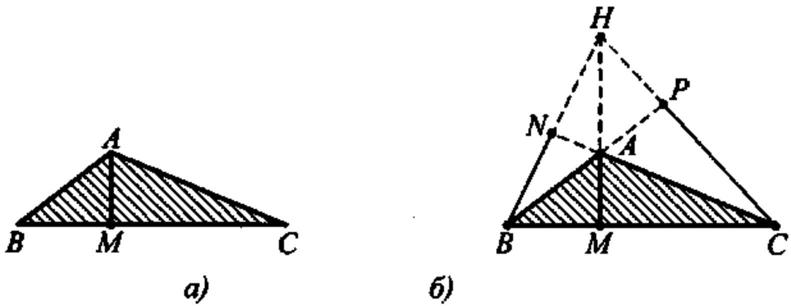
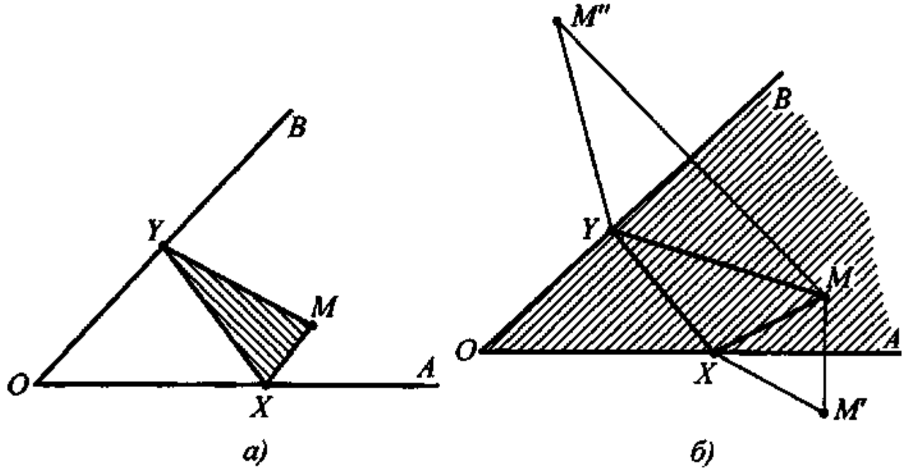
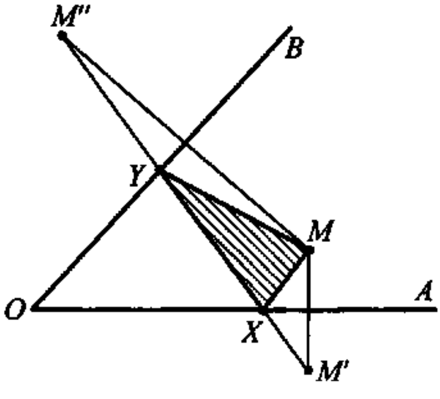


Рис. 5.36





в)

Рис. 5.37

5.63. *Решение.*

1. Дан угол BOA и внутри него точка M (рис. 5.37 а).

2. Построить на стороне угла точки X и Y так, чтобы периметр ΔMXY был наименьшим (рис. 5.37 а).

3. Пусть X и Y (рис. 5.36 а) искомые точки.

4. Построим точки M' и M'' симметричные точке M относительно сторон данного угла (построение) (рис. 5.37 б).

5. Периметр треугольника MXY равен $MX + XY + MY = MX + XY + M''Y$, т.е. представляет собой периметр ломаной линии $M'XYM''$.

6. Очевидно, эта величина получит наименьшее значение, когда точки M', X, Y и M'' будут лежать на одной прямой, т.е. когда точки X и Y расположатся на прямой, соединяющей точки M' и M''.

Приведенный анализ приводит к следующему построению:

— Для определения искомых точек X и Y достаточно построить точки M' и M'' симметричные точке M относительно сторонах угла AOB (рис. 5.37 в);

— соединить точки M' и M'' прямой (рис. 5.37 в);

— и отметить точки X и Y пересечения этой прямой со сторонами угла (рис. 5.37 в).

Треугольник MXY искомый.

5.64. *Решение.*

1. Дано: В остроугольном ΔABC, $AC = b$, прилежащий к ней угол A, равный α и разность двух сторон $AB - BC = r$ (рис. 5.38 а).

2. Построить треугольник по этим данным.

Анализ.

3. Пусть ΔABC (рис. 5.38 б) — искомый треугольник.

4. Величины b и α являются элементами треугольника ABC.

5. Чтобы ввести в чертеж данную величину r, достаточно построить сторону BC, симметричную стороне BC' относительно биссектрисы угла B.

6. Точка C преобразуется в точку C', точка C' окажется на стороне AB, причем отрезок $AC' = AB - BC' = AB - BC = r$ (рис. 5.38 б).

7. В треугольнике ACC' теперь известны две стороны и угол между ними, так что он легко может быть построен.

8. Кроме этого, замечаем, что биссектриса угла B перпендикулярна прямой CC' и делит отрезок CC' пополам.

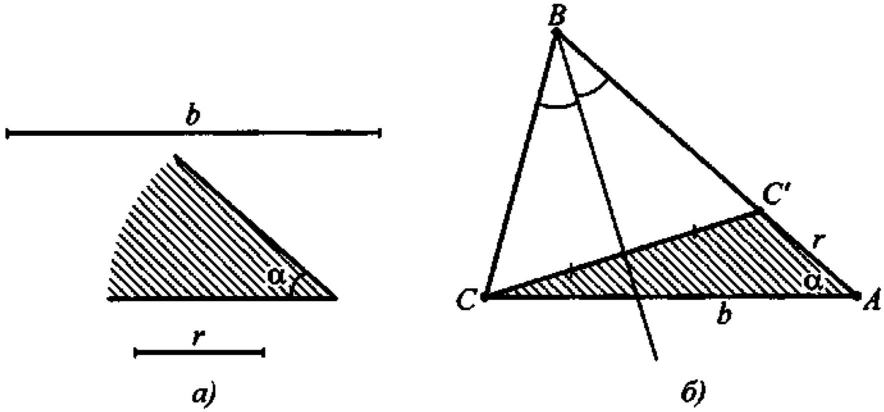


Рис. 5.38

Построение:

— для построения треугольника ABC надо предварительно построить треугольник ACC' по двум сторонам $AC = b$, $AC' = r$ и углу между ними α;

— затем провести прямую, перпендикулярную CC', через середину отрезка CC' до пересечения с лучом AC';

— эта точка пересечения и явится третьей вершиной B искомого треугольника.

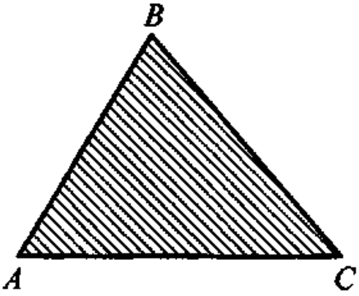
Доказательство не составляет труда.

Исследование. Заметим прежде всего, что по условию $AB > BC$ и поэтому $\angle A < \angle C$, следовательно, угол α должен быть острым. При этом условии ось симметрии точек C и C' пересечет луч AC' в том и только в том случае, когда $\angle CC'B$ острый, т.е. $\angle AC'C$ тупой, так что отрезок AC' меньше проекции отрезка AC на прямую AB.

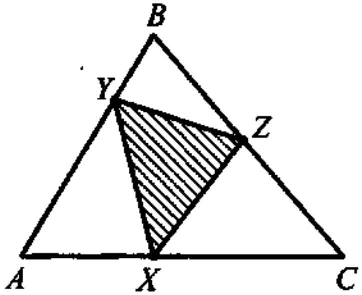
5.65. *Решение.*

1. Дан остроугольный треугольник ABC (рис. 5.39 а).

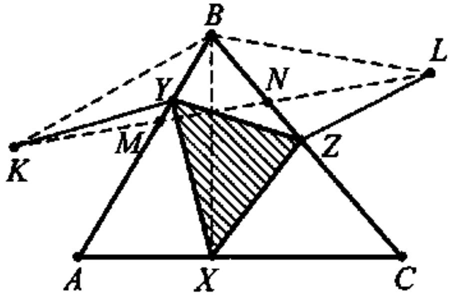
2. Впишите в ΔABC треугольник с наименьшим периметром.



а)



б)



в)

Рис. 5.39

3. Пусть ΔXYZ — произвольный треугольник, вписанный в данный треугольник ABC (рис. 5.39 б).

4. Отразим точку X симметрично относительно сторон AB и BC (рис. 5.39 в).

5. Длины ломаных $XYZX$ и $KYZL$ совпадают. Поэтому из всех вписанных треугольников с вершиной X наименьший периметр имеет тот треугольник, для которого ломаная $KYZL$ является частью прямой, а именно ΔXMN.

6. Если теперь из всех «минимальных» треугольников XMN, соответствующих различным положениям точки выбрать тот, периметр которого будет наименьшим, то этот треугольник и будет, очевидно, искомым.

7. Поэтому теперь требуется найти такое положение вершины X, чтобы отрезок KL имел наименьшую длину.

8. ΔBKL — равнобедренный ($BK = BX = BL$). А так как угол при вершине B не зависит от положения точки X ($\angle KBL = 2\angle ABC$),то основание будет наименьшим в том треугольнике BKL, в котором боковая сторона BK (равная BX) является наименьшей.

9. Отрезок BX является кратчайшим среди всех отрезков, соединяющих точку B с точками прямой AC, в том случае, когда $BX \perp AC$.

10. Так как результат «симметричен» по отношению ко всем вершинам искомого треугольника, то точки X, Y, Z — основания высот, проведенных из точек A, B, C.

5.66. *Решение.* 1. Пусть ΔKMD — искомый треугольник, $K \in AC$, $D \in BC$, тогда прямая, содержащая точку M и перпендикулярная прямой AB, является осью симметрии треугольника KMD (рис. 5.40).

2. Для построения искомого треугольника поступаем следующим образом:

а) Проводим прямую l, содержащую точку M, перпендикулярно прямой AB.

б) Затем на сторонах AC и BC строим точки, симметричные относительно прямой l. Для этого построим образ одной из сторон AC или BC относительно прямой l. Положим для определенности, что $B'C'$ является образом отрезка BC. Тогда точка пересечения (если она существует) отрезков AC и $B'C'$ и является одной из вершин искомого треугольника.

Если точка M принадлежит оси симметрии отрезка AB, то искомым треугольником будет ΔAMB.

Если точка M не принадлежит оси симметрии отрезка AB, то задача имеет решение в том случае, если прямые AC и $B'C'$ пересекаются.

Если ΔABC — равносторонний или равнобедренный с основанием AB и точка M принадлежит оси симметрии отрезка AB, то задача имеет бесконечно много решений.

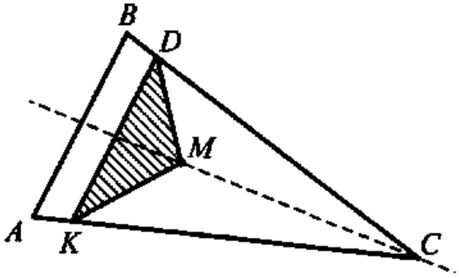


Рис. 5.40

5.67. *Решение.*

а) 1. Положим, что точки A к B находятся в одной и той же полуплоскости относительно прямой l.

2. Пусть точка B' симметрична точке B относительно l, прямая AB' пересекает прямую l в точке C.

3. Треугольник ABC имеет наименьший периметр, так как $AC + CB = AC + CB' = AB'$, а для любой другой точки C', принадлежащей прямой l, получаем $AC' + C'B = AC + C'B' > AB' = AC + CB$.

4. Если точки A и B находятся в разных полуплоскостях относительно прямой l, то искомый треугольник вырождается в отрезок AB.

5. Если $AB \perp l$, то искомый треугольник также вырождается в отрезок.

б) 1. Если точка A находится внутри острого угла, то находим точки A' и A'', симметричные точке A относительно сторон угла.

2. Точки пересечения прямой $A'A''$ со сторонами угла являются вершинами B и C искомого треугольника.

3. Действительно, периметр этого треугольника равен длине отрезка $A'A''$, а для любых других точек B' и C' на тех же сторонах угла периметр треугольника $AB'C'$ будет равен длине ломаной $A'B'C'A''$, но $A'B' + B'C' + C'A'' > A'A'' = AB + BC + CA$.

Для прямого и тупого угла это построение неосуществимо (почему?).

5.68. *Решение.*

1. Постройте образ отрезка TX при симметрии относительно прямой AB. Получаем $S_{AB}(TX) = T'X$.

2. Лучи SA и SB будут высекать на отрезке $T'X$ ту часть, которую увидит наблюдатель.

5.69. *Решение.* Решение сводится к тому, чтобы данный треугольник разрезать на симметричные части, тогда каждую из таких фигур можно перевернуть изнанкой вверх и уложить на прежнее место.

Можно предложить два варианта решения.

1-й вариант. 1. Проведем биссектрисы трех углов треугольника ABC. Они пересекаются в точке K.

2. Обозначим через X, Y, Z проекции точки K на стороны BC, CA и AB соответственно.

3. Треугольник можно разрезать на три симметричных четырехугольника: $AYKZ$, $BZKX$, $CXKY$.

2-й вариант. 1. Пусть BC — наибольшая сторона треугольника.

2. Проекция вершины A на BC — точка P лежит между точками B и C.

3. Найдем середины AB и AC — точки M и N.

4. Соединив точки M и N с точкой P, получим три симметричные фигуры: четырехугольник $AMPN$ и два равнобедренных треугольника BMP и CNP. (Симметричность этих фигур следует доказать.)

Некоторые треугольники, например прямоугольные, можно разбить всего на две симметричные части — треугольники.

5.70. *Решение.* Покажем, что пешеходы будут ближе всего друг к другу, когда они находятся в точках C и D на одинаковом расстоянии от точки O (рис. 5.41).

1. Пусть они находятся в других точках: E и F (рис. 5.41).

2. Построим отрезок DE', симметричный DE относительно CD, видим, что $EF > FE' = CD$, так как EF — гипотенуза прямоугольного треугольника $FE'E$ (рис. 5.41).

3. Если $\angle AOB = 90°$, $AO = a$, $BO = b$ и $a > b$, то минимальное расстояние между пешеходами достигается через время $\frac{a+b}{2v}$ после начала движения и равно $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

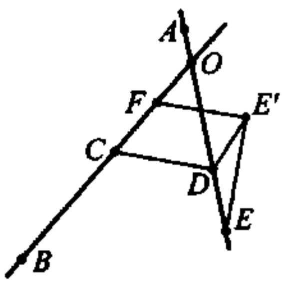
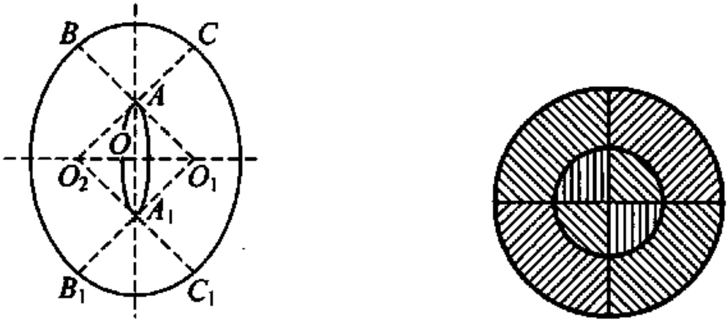


Рис. 5.41

5.71. *Решение.* Доски оказались из дерева редкой дорогой породы, и мастеру хотелось употребить их в дело полностью без каких бы то ни было обрезков.



а) *б)*

Рис. 5.42

Чтобы не делать лишних, необдуманных разрезов, столяр сначала вырезал из плотной бумаги выкройку доски, присмотрелся к форме, кое-что проверил циркулем. Оказалось, что намерение мастера вполне осуществимо, и притом с небольшим количеством разрезов каждой доски.

Как распилил столяр принесенные доски?

1. Сначала столяр заметил, что выкройка доски представляет собой симметричную фигуру с двумя осями симметрии (рис. 5.42 а).

2. Затем он обнаружил, что если половину продольной оси отверстия OA (рис. 5.40 а) отложить на поперечной оси $OO_1 = OA$ и $OO_2 = OA$ и соединить прямыми точки O_1 и A_1, а также O_2 и A, то каждая из фигур BO_1B_1 и CO_2C_1 будет в точности составлять четверть круга с радиусом O_1B, а каждая из фигур ABC и $A_1B_1C_1$ — четверть круга с радиусом A_1B_1, который равен половине радиуса A_1B_1.

3. Столяр распилил каждую доску по прямым BA, CA, B_1A_1 и C_1A_1 и из полученных 8 частей склеил аккуратную круглую крышку для стола, как показано на рисунке 5.42 б.

5.72. *Решение.* Если бы точки A и B располагались по разные стороны от прямой l, решение было бы очевидным: нужно просто соединить эти точки отрезком прямой. Попробуем исправить ситуацию, имеющую место в данной задаче.

1. Отразим точку B симметрично относительно прямой l (рис. 5.43).

2. При любом расположении точки M на прямой l ломаные AMB и AMB' имеют одинаковую длину.

3. Точки же A и B', как нам того и хотелось, расположены по разные стороны от прямой l, и выбрать из всех ломаных вида AMB' кратчайшую не составляет труда.

4. Именно, точку M следует взять на пересечении прямой l с отрезком AB'.

5. Заметим, что отрезки AM и MB образуют равные углы с прямой l; следовательно, по закону отражения свет всегда распространяется по кратчайшему пути.

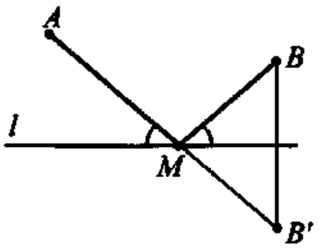


Рис. 5.43

Список используемой литературы

1. *Абрамов А.М., Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 6 классе. — М.: Просвещение, 1980. — 112 с.

2. *Абрамов А.М., Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 7 классе . — М.: Просвещение, 1981. — 144 с.

3. *Варданян С.С.* Задачи по планиметрии с практическим содержанием. Под ред. Гусева В.А. — М.: Просвещение, 1988. — 128 с.

4. *Возняк Г.М., Гусев В.А.* Прикладные задачи на экстремум. — М.: Просвещение, 1985. — 144 с.

5. *Гусев В.А.* Геометрия 6. Экспериментальный учебник. Ч. I–II. — М.: Авангард, 2000. — 275 с.

6. *Гусев В.А.* Геометрия 7. Экспериментальный учебник. Ч. III. — М.: Авангард, 1999. — 96 с.

7. *Гусев В.А.* Геометрия 7. Экспериментальный учебник. Ч. IV. — М.: Авангард, 1999. — 128 с.

8. *Гусев В.А.* Геометрия. 5–6 классы: учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Русское слово, 2005. — 240 с.

9. *Гусев В.А.* Геометрия. 7 класс. — М.: Русское слово, 2003 — 240 с.

10. *Гусев В.А.* Как помочь ученику полюбить математику? Ч. 1 — М.: Авангард, 1994. — 168 с.

11. *Гусев В.А.* Каким должен быть курс школьной геометрии // Математика в школе. — 2002. — № 3. — С. 4–8.

12. *Гусев В.А.* Методика преподавания курса «Геометрия 6–9» Ч. 1 — М.: Авангард, 1995. — 100 с.

13. *Гусев В.А.* Методика преподавания курса «Геометрия 6–9» Ч. 2 — М.: Авангард, 1996. — 127 с.

14. *Гусев В.А.* Методика преподавания курса «Геометрия 6–9» Ч. 3 — М.: Авангард, 1997. — 137 с.

15. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. — М.: Вербум-М, 2003. — 432 с.

16. *Гусев В.А.* Сборник задач по геометрии. 5–9 кл.: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / В. А. Гусев. — М.: Мир и образование, 2005. — 480 с.

17. *Гусев В.А., Замаховский М.П., Назиев А.Х.* Математический словарь для школьников. Сдай экзамены на «пять»! — Ростов Феникс, 2004. — 379 с.

18. *Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прохоров А.А.* Геометрия. Полный справочник. — М.: Махаон, 2006.

19. *Гусев В.А., Комбаров А.П.* Математическая разминка: кн. для учащихся 5–7 кл. — М.: Просвещение, 2005. — 94 с.

20. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по решению математических задач. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. — М.: Просвещение 1985 — 223 с.

21. *Гусев В.А.* Геометрия 7 (6). Экспериментальный задачник. — М.: Авангард 2000. — 218 с.

22. *Гусев В.А.* Геометрия 7 (6). Экспериментальный учебник. — М.:Авангард, 2000. — 218 с.

23. *Гусев В.А.* Математика. Сборник геометрических задач. 5–6 классы. — М.: Экзамен, 2011.

24. *Гусев В.А.* Сборник задач по геометрии 5–9. — М.: Оникс 21 век. Мир и образование, 2005.

25. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Нагибин Ф.Ф., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 6 классе. В помощь учителю. Под ред. А.Н.Колмогорова. — М.: Просвещение, 1972. — 126 с.

26. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Нагибин Ф.Ф., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 7 классе. — М.: Просвещение, 1973. — 174 с.

27. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Нагибин Ф.Ф., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 7 класса. — М.: Просвещение, 1973. — 128 с.

28. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 6 класса. — М.: Просвещение, 1980. — 62 с.

29. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 7 класса. — М.: Просвещение, 1981. — 80 с.

30. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Скопец З.А., Черкасов Р.С.* Сборник задач по геометрии для 6–8 классов. — М.: Просвещение, 1975. — 224 с.

31. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 6 класса. Дидактические материалы. — М.: Просвещение, 1984. — 64 с.

32. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 7 класса. Дидактические материалы. М. : Просвещение, 1986. — 68 с.

33. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 6 класса. Изд. 2-е, переработанное. — М.: Просвещение, 1988. — 64 с.

34. *Гусев В.А., Мордкович А.Г., Литвиненко В.Н.* Практикум по решению математических задач. Геометрия. — М.: Просвещение, 1985. — 224 с.

35. *Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. — М.: Просвещение, 1984.

36. *Лановок Л.М.* Тысяча проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.

37. *Мот Э.Э., Даунс Ф.Л.* Геометрия / пер с англ. И.А. Вайштейна; под ред. И.М. Яглома. — М.: Просвещение, 1972. — 622 с.

38. *Пелерман Я.И.* Занимательные задачи. — М.: 2001.

39. *Погорелов А.В.* Геометрия 7–9. — М.: Просвещение, 2006.

40. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия 7–9 классы. — М.: Дрофа, 2002.

Справочное издание

Гусев Валерий Александрович

Сборник задач по геометрии

7 класс

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16054 от 28.02.2012 г.

Главный редактор *Л.Д. Лаппо*
Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Т.В. Фатюхина*
Корректор *Т.И. Шитикова*
Дизайн обложки *А.М. Позднякова*
Компьютерная верстка *А.П. Юскова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).**